муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края
357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	8А
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	19.05. 2020
Тема урока	Повторение. Четырехугольники.
Основной вид учебной деятельности	Урок закрепления и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята!

На этом уроке мы повторим и обобщим все полученные знания при изучении главы «Четырехугольники». Вспомним определения, свойства и признаки таких фигур, как параллелограмм, трапеция, прямоугольник, ромб, квадрат. Отдельно выделим специфические свойства этих фигур и их частные случаи (равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция). Затем повторим теорему Фалеса и решим несколько примеров, которые демонстрируют применение всех изученных фактов к указанным фигурам.

II. Обобщение и систематизация знаний

Откройте учебник геометрии на стр. 72 прочтите теоретический материал § 6

Ранее мы уже познакомились с такими видами четырехугольников, как параллелограмм и трапеция, и их частными случаями – прямоугольником, ромбом и квадратом. Мы изучили их основные свойства и признаки. Сегодня мы повторим и обобщим все полученные нами знания по этой теме.

Повторим основной теоретический материал.

Трапеция – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны (см. Рис. 1).

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AB \nparallel CD \end{cases}$$

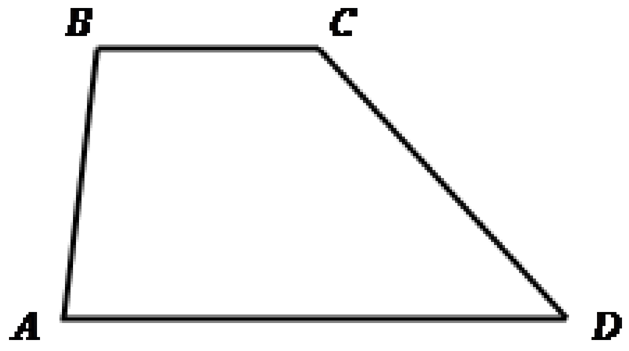


Рис. 1. Трапеция

Выделяют два отдельных типа трапеций: равнобедренную и прямоугольную.

Равнобедренная трапеция – это трапеция, в которой боковые стороны равны (см. Рис. 2).

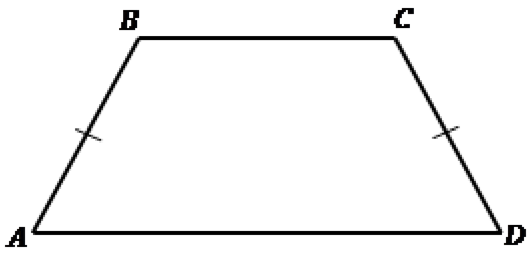


Рис. 2. Равнобедренная трапеция

Прямоугольная трапеция – это трапеция, в которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию (см. Рис. 3).

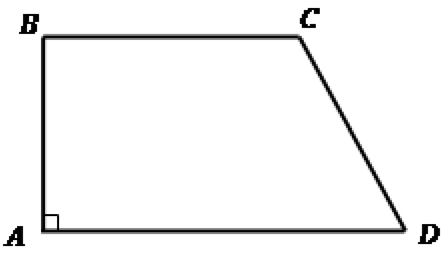


Рис. 3. Прямоугольная трапеция

Отдельно стоит вспомнить такой важный элемент трапеции, как ее средняя линия.

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (см. Рис. 4).

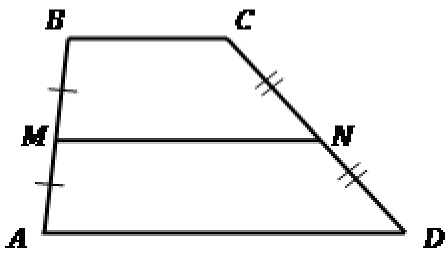


Рис. 4. Средняя линия трапеции

Основные свойства средней линии трапеции:

1. $MN \parallel AD, MN \parallel BC$ – параллельна основаниям трапеции;

2. $MN = \frac{AD+BC}{2}$ – равна их полусумме.

2. Определение, свойства и признаки параллелограмма

Параллелограмм – четырехугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны (см. Рис. 5).

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

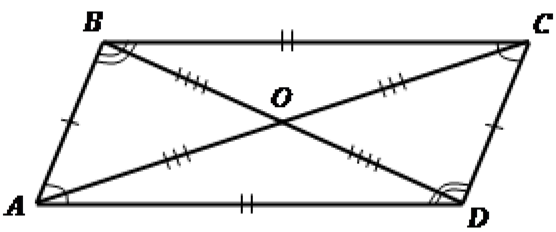


Рис. 5. Параллелограмм

Основные свойства параллелограмма:

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle BCD, \angle ABC = \angle CDA \ \text{(противоположные углы равны)} \\ AB = DC, BC = AD \ \text{(противоположные стороны равны)} \\ AO = OC, BO = OD \ \text{(диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам)} \\ \angle BAD + \angle ABC = 180° \ \text{(сумма углов, прилежащих к одной стороне)} \end{cases}$$

Чтобы иметь возможность при решении задач пользоваться указанными свойствами, нам необходимо понимать, является ли указанный четырехугольник параллелограммом или нет. Для этого необходимо знать признаки параллелограмма.

Теорема. **Первый признак параллелограмма.** Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны (см. Рис. 6), то этот четырехугольник – параллелограмм. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABCD -$ параллелограмм.

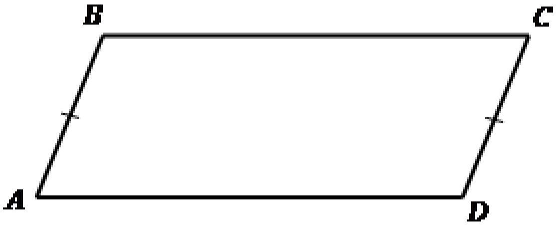


Рис. 6. Первый признак параллелограмма

Теорема. **Второй признак параллелограмма.** Если в четырехугольнике каждые две противоположные стороны равны (см. Рис. 7), то этот четырехугольник – параллелограмм. $\begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow ABCD -$ параллелограмм.

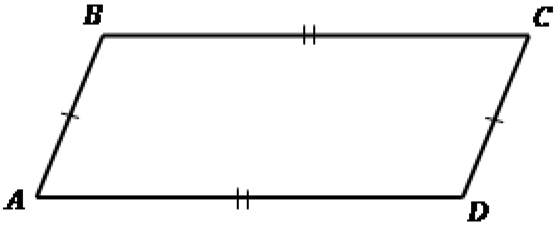


Рис. 7. Второй признак параллелограмма

Теорема. **Третий признак параллелограмма.** Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам (см. Рис. 8), то этот четырехугольник – параллелограмм. $\begin{cases} BO = OD \\ AO = OC \end{cases} \Rightarrow ABCD -$ параллелограмм.

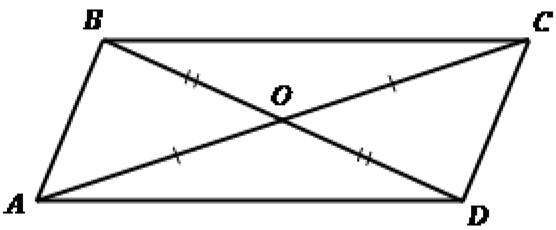


Рис. 8. Третий признак параллелограмма

Теперь повторим частные случаи параллелограмма.

3. Определение, свойство и признак прямоугольника

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые (см. Рис. 9).

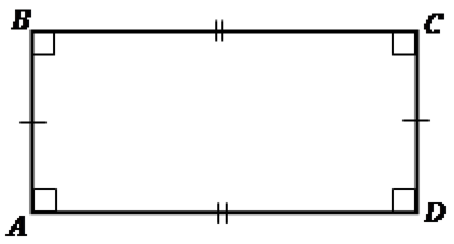


Рис. 9. Прямоугольник

Замечание. Очевидным эквивалентным определением прямоугольника (иногда его именуют признаком прямоугольника) можно назвать следующее. **Прямоугольник** – это параллелограмм с одним углом $90°$. Это утверждение практически очевидно, и мы оставим его без доказательства, пользуясь далее как определением.

Т.к. прямоугольник, как это видно из определения, является частным случаем параллелограмма, то ему присущи все ранее описанные свойства параллелограмма, однако у него имеются и свои специфические свойства, которые мы сейчас рассмотрим.

Теорема. **Свойство прямоугольника**. Диагонали прямоугольника равны (см. Рис. 10).

$AC = DB$.

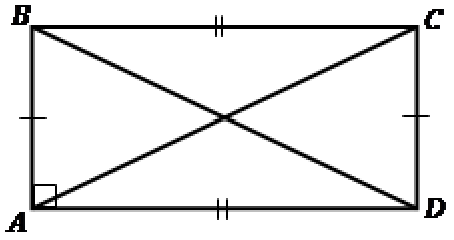


Рис. 10. Свойство прямоугольника

Теорема. **Признак прямоугольника**. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник (см. Рис. 11).

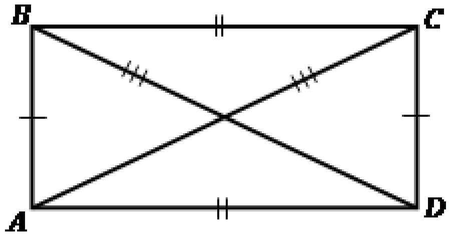


Рис. 11. Признак прямоугольника

4. Определение и свойство ромба

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны (см. Рис. 12).

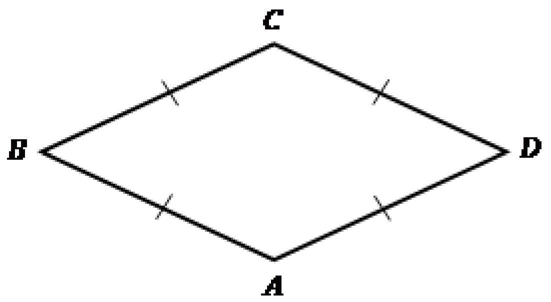


Рис. 12. Ромб

Замечание. Для определения ромба достаточно указывать даже более короткое утверждение, что это параллелограмм, у которого равны две смежные стороны $AB = BC$.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, т.к. является его частным случаем, но имеет и свое специфическое свойство.

Теорема. **Свойство ромба**. Диагонали ромба перпендикулярны и делят углы ромба пополам (см. Рис. 13).

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ \angle CBO = \angle ABO \\ \angle BCO = \angle DCO \end{cases}$$

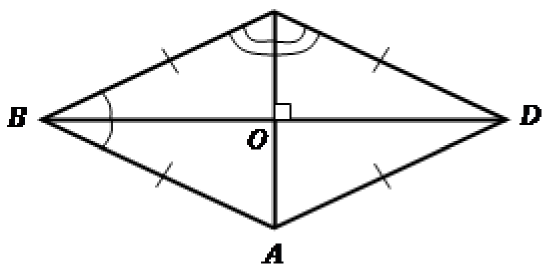


Рис. 13. Свойство ромба

5. Определение и свойства квадрата

Квадрат – 1) прямоугольник, у которого стороны равны; 2) ромб, у которого углы прямые (см. Рис. 14). Указанные определения эквивалентны и применяются в любой удобной форме.

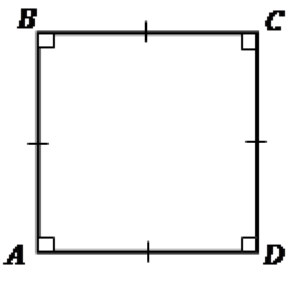


Рис. 14. Квадрат

Квадрату присущи свойства тех фигур, частным случаем которых он является (параллелограмм, прямоугольник, ромб). Перечислим их.

Основные свойства квадрата (см. Рис. 15):

1. Все углы прямые.

2. Диагонали равны.

3. Диагонали перпендикулярны.

4. Точка пересечения делит диагонали пополам.

5. Диагонали делят углы квадрата пополам.

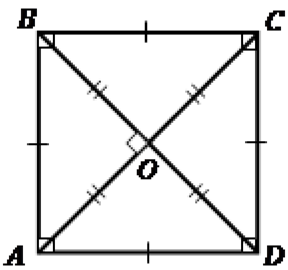


Рис. 15. Свойства квадрата

6. Задача на схожесть свойств трапеции и параллелограмма

Теперь, когда мы перечислили и вспомнили основные свойства основных изученных четырехугольников, мы можем закрепить эти знания на примере решения задач.

Пример 1. (Обобщенная задача на трапецию и параллелограмм). Дана трапеция $ABCD$ или параллелограмм ABC_1D_1 (см. Рис. 16). AO и BO $-$ биссектрисы углов при боковой стороне трапеции (параллелограмма). Найти угол между биссектрисами $\angle AOB$.

Решение. Это пример задачи, демонстрирующий схожесть некоторых свойств параллелограмма и трапеции, в нем не важно, какая конкретно из этих двух фигур задана. Изобразим рисунок.

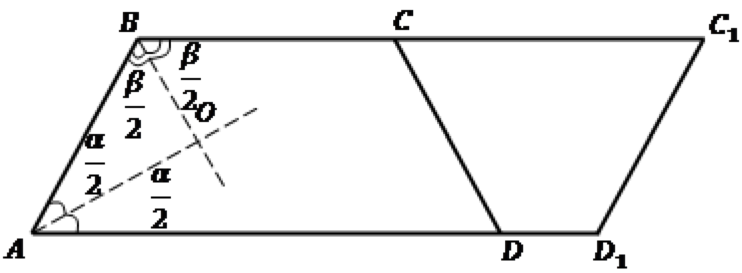


Рис. 16

AO и BO – биссектрисы, они делят соответствующие углы пополам, обозначим их $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$.

По свойству трапеции (параллелограмма) $\alpha+\beta=180° \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=90°$.

Рассмотрим ΔAOB: $\angle AOB=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=180°-\frac{\alpha+\beta}{2}=180°-90°=90°$.

Ответ: $90°$.

7. Теорема Фалеса и задача на ее применение

Вспомним формулировку теоремы Фалеса.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, которые пересекают стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (см. Рис. 17).

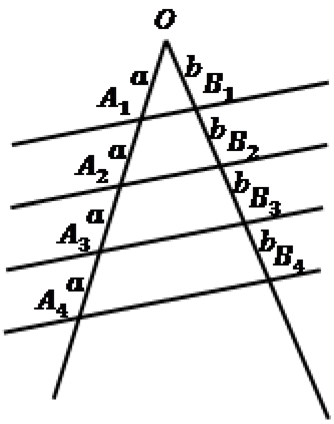


Рис. 17. Теорема Фалеса

Рассмотрим задачу на трапецию с применением теоремы Фалеса.

Пример 2. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части, и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Найдите длину этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м.

Решение. Изобразим Рис. 18 со всеми элементами, которые пригодятся нам в процессе решения. Известно, что $AD=5\text{ м}, BC=2\text{ м}, AM_1=MM_1=MB, MN \parallel M_1N_1 \parallel AD$. Найти длины MN и M_1N_1.

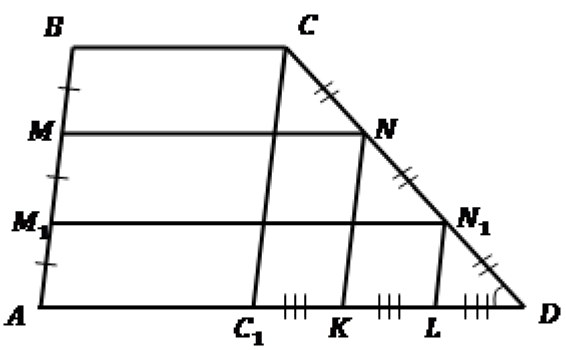


Рис. 18

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Фалеса относительно угла $\angle CDA$, проведем прямые $AB \parallel CC_1 \parallel NK \parallel N_1L$.

Сначала рассмотрим параллелограмм $ABCC_1$, в нем по свойству $AC_1 = BC = 2$ м.

Вернемся к проведенным параллельным прямым, по теореме Фалеса: $\begin{cases} DN_1 = N_1N = NC \\ DL = LK = KC_1 \end{cases}$. $C_1D = AD - AC_1 = 5 - 2 = 3$ м. Поскольку отрезок C_1D разделен на три равные части, то $DL = LK = KC_1 = 3:3 = 1$ м.

Теперь, если внимательно посмотреть на параллелограммы, образованные пересечениями линий MN и M_1N_1 с проведенными нами прямыми $AB \parallel CC_1 \parallel NK \parallel N_1L$, можно легко определить длины отрезков MN и M_1N_1: $MN = 2 + 1 = 3$ м, $M_1N_1 = 2 + 1 + 1 = 4$ м.

Ответ. $MN = 3$ см, $M_1N_1 = 4$ м.

Пример 3. Основания трапеции относятся как 2:3. Средняя линия равна 5 м. Найдите основания.

Решение. Изобразим Рис. 19 и укажем, что нам дано: $MN = 5$ м, $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$. Найти BC и AD.

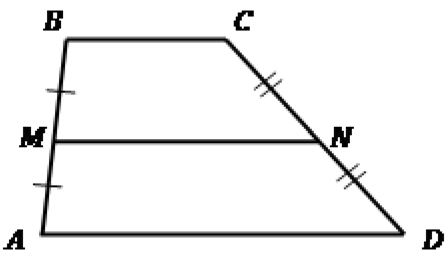


Рис. 19

Поскольку известно, что $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$, то выразим основания трапеции через условные части x: $BC = 2x, AD = 3x$. Запишем свойство средней линии трапеции:

$$\frac{BC + AD}{2} = MN \Rightarrow \frac{2x + 3x}{2} = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BC = 2x = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}, AD = 3x = 3 \cdot 2 = 6 \text{ м}.$$

Ответ. $BC = 4$ м, $AD = 6$ м.

8. Разные задачи на четырехугольники

Пример 4. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делился бы данной точкой пополам.

Решение. Внутри угла с вершиной O дана точка M. Изобразим это на Рис. 20 со всеми элементами, которые понадобятся нам для решения задачи.

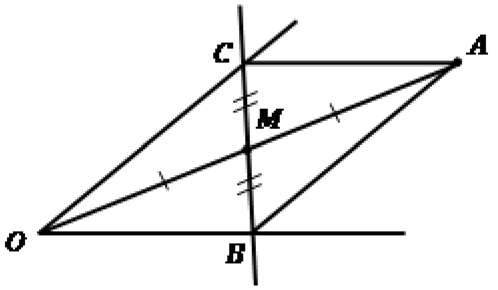


Рис. 20

Отложим отрезок OA из точки O через точку M так, чтобы $OM = MA$, затем проведем отрезки $CA \parallel OB$ и $BA \parallel OC$, получим точки пересечения со сторонами угла B и C соответственно. Соединим эти точки прямой, она и будет искомой. Докажем это.

Построенная фигура $OCAB$ является параллелограммом, т.к. по построению имеет параллельные противоположные стороны, отрезки CB и OA являются диагоналями параллелограмма, следовательно, по его свойству точкой пересечения (M) делятся пополам и $CM = MB$, что и требовалось по условию задачи.

Ответ. Искомая прямая – BC.

Пример 5. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите стороны прямоугольника.

Решение. Изобразим Рис. 21.

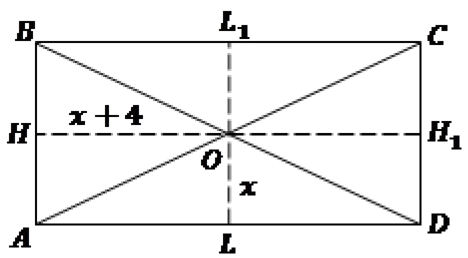


Рис. 21

Опустим из точки пересечения диагоналей перпендикуляры на стороны, длины которых и будут расстояниями от точки пересечения диагоналей до сторон прямоугольника. Обозначим отрезок $OL = x$, тогда по условию $OH = x + 4$. Поскольку $HH_1 = 2OH = AD$ и $LL_1 = 2OL = AB$, получаем, что $AD = 2(x + 4) = 2x + 8, AB = 2x$. Подставим это в формулу периметра прямоугольника:

$$P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 2(2x + 8 + 2x) = 8x + 16 = 56 \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AD = BC = 2(x + 4) = 2 \cdot (5 + 4) = 18 \text{ см}, AB = CD = 2x = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}$$

.

Ответ: $AD = BC = 18 \text{ см}, AB = CD = 10 \text{ см}$.

Пример 19. Периметр ромба равен 64, один из его углов 120°. Найдите меньшую диагональ ромба.

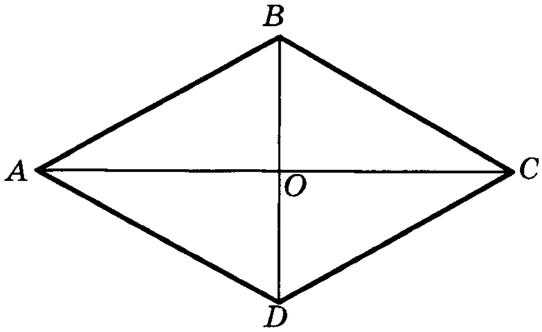
Решение. Все стороны ромба равны, поэтому $AB = 64 : 4 = 16$.

Диагонали ромба делят его углы пополам, поэтому $\angle ABO = 60°$.

В прямоугольном треугольнике AOB $\angle BAO = 90° - 60° = 30°$, поэтому $BO = 0{,}5AB = 8$, $BD = 2BO = 16$.

Ответ: 16

Замечание. Искомый отрезок можно найти как сторону равнобедренного треугольника ABD с углом 60°: такой треугольник является равносторонним, поэтому $BD = AB = 16$.



1. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Определить углы ромба.

2. В прямоугольном треугольнике прямой угол разделён пополам; из точки пересечения биссектрисы и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Доказать, что четырёхугольник, образованный этими прямыми и катетами, есть квадрат.

3. Боковая сторона трапеции разделена на 4 равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найти длины отрезков этих параллельных прямых, заключённых между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 23 см и 15 см.

III. Контроль и коррекция знаний

Домашнее задание на 22.05.2020

1. учебник стр. 72 § 6 п.50 – 85повторить
2. **Решите задачи:**
   1. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.
   2. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 26 и одна сторона на 5 больше другой.
   3. Периметр ромба равен 86, а одна из диагоналей равна 28. Найдите длину второй диагонали ромба.
   4. Периметр равнобедренной трапеции равен 34, ее боковая сторона равна 8. Найдите среднюю линию трапеции.
   5. Периметр равнобедренной трапеции равен 54, ее средняя линия равна 13. Найдите боковую сторону трапеции.
3. **Выполните тестирование на ЯКлассе , пройдя по ссылке, отправленной на адрес Вашей электронной почты**

Проверочная работа по теме Параллелограмм и трапеция

Тест расположен на портале ЯКласс, **доступен с 20.05 10:00 по 21.05 18:00** содержит 5 заданий , по времени не более 30 минут. ***Две попытки, засчитывается лучший результат*** Рекомендуется выполнять во второй половине дня, когда портал испытывает меньшую нагрузку

Фото/или скриншот **домашнего** задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края

357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	8А
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	22.05. 2020
Тема урока	Повторение. Теорема Пифагора
Основной вид учебной деятельности	Урок закрепления и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята!

На этом уроке мы поговорим о свойствах прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора позволяет по двум любым сторонам прямоугольного треугольника вычислить третью. При этом верна не только прямая теорема Пифагора, но и обратная к ней – зная длины трех сторон треугольника, можно определить, является ли он прямоугольным.

Кроме теоремы Пифагора, мы поговорим о связи углов прямоугольного треугольника с длинами его сторон. Этот инструмент – тригонометрические функции – очень полезен не только для решения геометрических задач, и мы будем часто его использовать, постепенно расширяя не только для острых, но и для произвольных углов.

II. Обобщение и систематизация знаний

Откройте учебник геометрии на стр. 147 прочтите теоретический материал п.99

Египетский треугольник

Мы уже много раз обсуждали вопрос, почему так подробно изучаем именно треугольник (минимальная замкнутая ломаная, на треугольники можно разбить любой многоугольник и т. д.).

Но среди треугольников тоже можно выделить несколько особых видов, которые представляют особый интерес. Мы уже говорили о равнобедренном треугольнике (см. рис. 1) и его частном случае – равностороннем (см. рис. 2), а также о прямоугольном треугольнике (см. рис. 3).

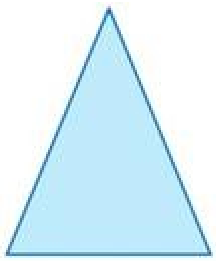


Рис. 1. Равнобедренный треугольник

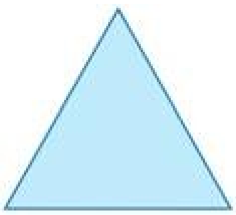


Рис. 2. Равносторонний треугольник

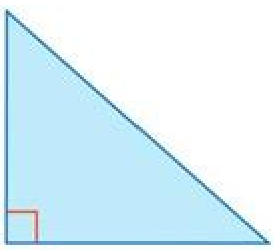


Рис. 3. Прямоугольный треугольник

Сегодня мы будем подробно изучать свойства именно прямоугольных треугольников. С прямыми углами мы сталкиваемся сплошь и рядом: угол парты, ноутбука, дома – этот ряд можно продолжать очень долго.

Прямой угол действительно особенный. Две прямые при пересечении образуют две пары углов, и почти всегда в одной паре углы больше, чем в другой (см. рис. 4). Кроме одного случая – если прямые пересекаются под прямым углом (рис. 5).

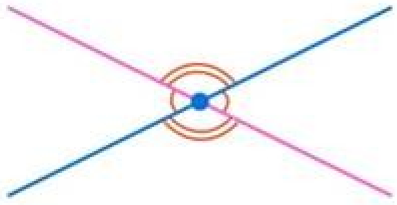


Рис. 4. При пересечении двух прямых образуются две пары углов, и почти всегда в одной паре углы больше, чем в другой

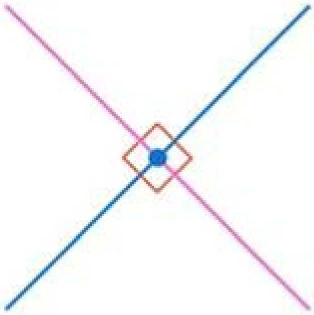


Рис. 5. Две прямые пересекаются под прямым углом

Понятно, что стена дома, чтобы он не упал, должна стоять перпендикулярно фундаменту (под прямым углом к нему) (см. рис. 6). Поэтому еще в древности остро стоял вопрос построения прямого угла. И неоценимую помощь в этом оказал прямоугольный треугольник.Древние египтяне знали, что если длины сторон треугольника образуют пропорцию $3:4:5$, то такой треугольник будет прямоугольным. Его так сейчас и называют – египетским (см. рис. 7).

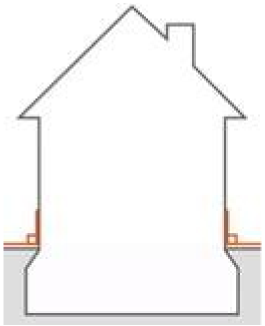


Рис. 6. Чтобы дом не упал, стена дома должна стоять перпендикулярно фундаменту

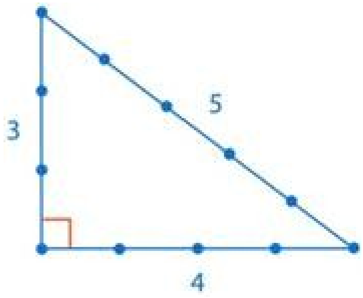


Рис. 7. Египетский треугольник

Теорема Пифагора

Конечно, египетский треугольник не единственный пример прямоугольного треугольника. Можно, например, построить прямоугольный треугольник, у которого один катет длиннее другого в 10 раз (см. рис. 13).

Рис. 13. Прямоугольный треугольник, где один катет длиннее другого в 10 раз

Но можно ли все-таки выделить в египетском треугольнике какое-то свойство, которое «делает его прямоугольным»? Заметим, что числа 3, 4 и 5 связаны следующим соотношением:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Т. е. сумма квадратов двух меньших сторон равна квадрату большей стороны. Может быть, это и есть то самое искомое свойство прямоугольного треугольника? Проверим.

Построим прямоугольный треугольник, например, с катетами 3 и 10. Проведем гипотенузу и попробуем измерить ее длину. Получилось примерно $10{,}44$ (см. рис. 14).

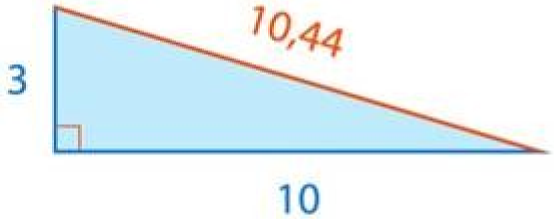


Рис. 14. У прямоугольного треугольника с катетами 3 и 10 гипотенуза примерно равна $10{,}44$

Проверяем нашу гипотезу:

$3^2 + 10^2 = 109$

$10{,}44^2 = 108{,}9936$

Получились очень близкие значения. Похоже, что разница только в погрешности измерений.

Итак, у нас есть *гипотеза*: если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его меньших сторон (катетов) равна квадрату гипотенузы**.** Сейчас мы докажем, что это верное утверждение.

Первое доказательство этого факта приписывается Пифагору (см. рис. 15). Поэтому утверждение так и называется – теорема Пифагора.

Рис. 15. Пифагор

Существует более сотни доказательств, мы рассмотрим одно из самых популярных.

Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рис. 16).

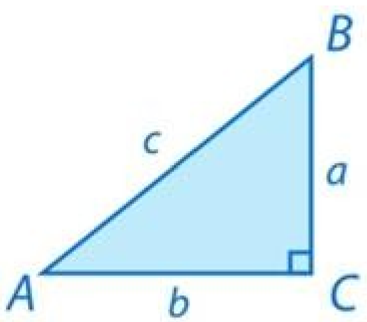


Рис. 16. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы c равен сумме квадратов катетов a и b: $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство.

Достроим треугольник до квадрата следующим образом (см. рис. 17).

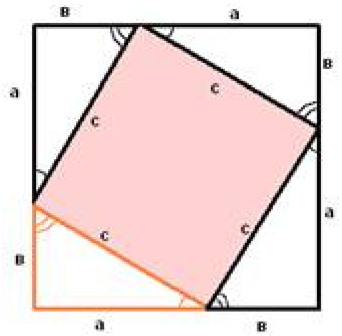


Рис. 17. Построение квадрата при помощи прямоугольных треугольников

Его сторона равна $a+b$ (см. рис. 18). Площадь этого большого квадрата равна $(a+b)^2$.

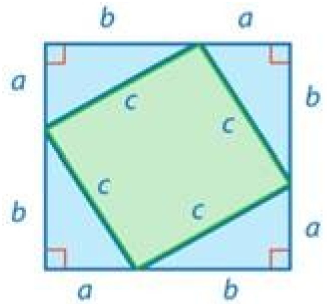


Рис. 18. Квадрат со стороной $a+b$, и площадью $(a+b)^2$

С другой стороны, площадь этого квадрата можно посчитать как сумму площадей четырех треугольников и маленького квадрата. Площадь каждого из прямоугольных треугольников равна $\frac{1}{2}ab$, площадь маленького квадрата равна c^2.

Приравнивая площади, получаем:

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема доказана.

Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема Пифагора – это *свойство прямоугольного треугольника*: если треугольник прямоугольный, то у него обязательно квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других.

Работает ли это соотношение как признак, т. е. в обратную сторону? Можно ли утверждать, что если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то он прямоугольный? Или другая эквивалентная формулировка того же утверждения: можно ли утверждать, что не существует непрямоугольных треугольников, у которых квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других? Обратная теорема Пифагора тоже верна. Давайте докажем это.

Теорема, обратная теореме Пифагора: дан треугольник ABC, в котором $a^2 + b^2 = c^2$. Доказать, что $\angle C = 90°$ (см. рис. 19).

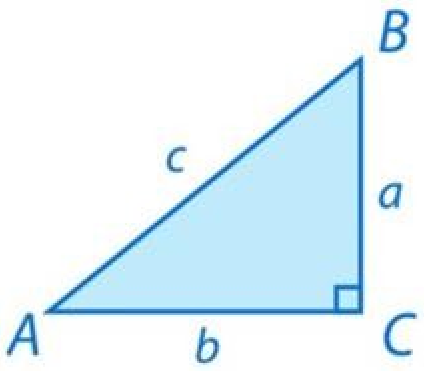


Рис. 19. Треугольник, в котором квадрат гипотенузы c равен сумме квадратов катетов a и b: $c^2 = a^2 + b^2$

Прямая и обратная теоремы Пифагора – это мощные и часто используемые геометрические инструменты, которые позволяют решить огромное количество задач.

Но вместе с тем, несмотря на широкую известность, теорема Пифагора является всего лишь частным случаем более общей теоремы (теоремы косинусов), которая позволяет, зная три стороны треугольника, не просто определить, есть ли в этом треугольнике прямой угол или нет, а найти величину углов треугольника. Подробнее о ней мы поговорим на уроках геометрии в 9 классе

Тригонометрия

Расстояние можно измерять в единицах длины (100 км), а можно, например, в единицах времени (2 дня пути) (см. рис. 21).

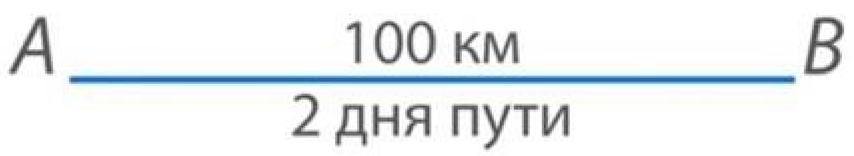


Рис. 21. Расстояние между точками A и B можно измерять по-разному

В зависимости от задачи удобными могут оказаться те или иные способы и единицы измерения. Например, расстояние между точками A и B всего пара километров, но машина преодолеет его не меньше чем за 15 минут (см. рис. 22).

Рис. 22. Расстояние между точками A и B всего пара километров, но машина преодолеет его не меньше чем за 15 минут

Мы умеем измерять углы в градусах. Для этого можно использовать специальный инструмент – транспортир (см. рис. 23).

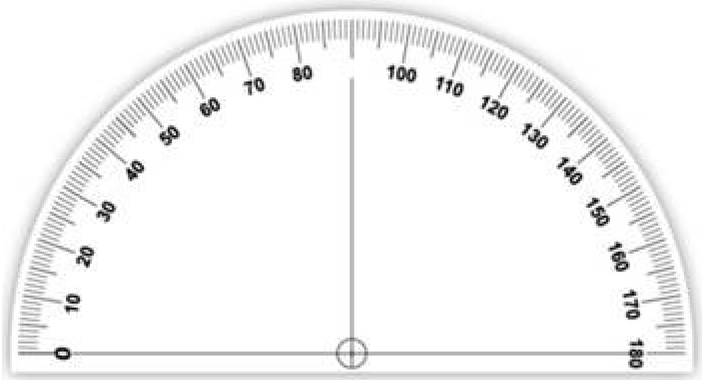


Рис. 23. Транспортир

Поскольку градус – это $\frac{1}{360}$ часть окружности, то градусная мера угла фактически показывает, какую часть от полного круга он составляет (см. рис. 24).

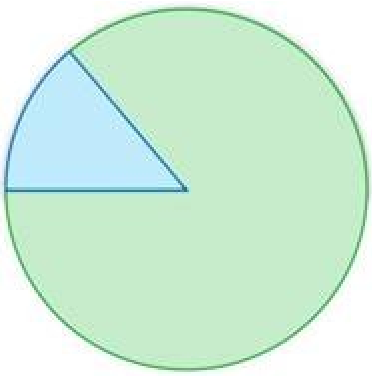


Рис. 24. Градусная мера угла, показывает, какую часть от полного круга угол составляет

Но это не всегда удобно. Рассмотрим такой пример: третий признак равенства треугольников (по трем сторонам) говорит нам о том, что любой треугольник однозначно задается длинами трех своих сторон. Но тогда, зная длины сторон треугольника $a, b, c,$ мы должны уметь находить и его углы.

Т. е. углы можно измерять и с помощью линейки. Как это делать? Вспомним еще один признак – признак подобия треугольников (по двум углам): если у треугольников равны углы, то эти треугольники подобны. Т. е. при пропорциональном увеличении или уменьшении длин сторон треугольника углы не меняются (см. рис. 25). Напрашивается вывод: углы могут быть как-то связаны с отношениями длин сторон (т. к. именно отношение не меняется, каким бы ни был коэффициент пропорциональности).

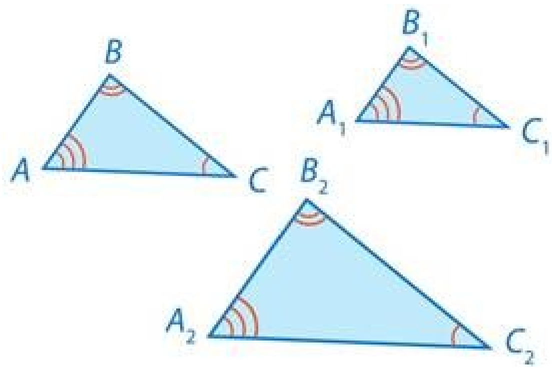


Рис. 25. При пропорциональном увеличении или уменьшении длин сторон треугольника углы не меняются

Раздел математики, который занимается решением задачи измерения углов через измерения длин, называется **тригонометрия** – (греч.) «измерение треугольников». И в начале его изучения одним из наших главных инструментов будет как раз прямоугольный треугольник.

Тригонометрические функции

Рассмотрим такую практическую задачу: как измерить высоту дома (или дерева)? На самом деле, существует много способов, рассмотрим один из них. Вытянем руку с поднятым большим пальцем перед собой и будем отходить от дома до тех пор, пока конец пальца не совместится с крышей дома (см. рис. 26).

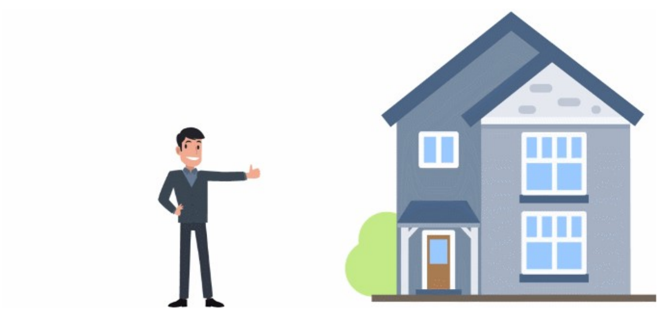


Рис. 26. Вытянули руку с поднятым большим пальцем перед собой и отошли от дома до тех пор, пока конец пальца не совместился с крышей дома

Зная параметры своего тела и измерив расстояние до дома, можно найти высоту дома:

$$H = \frac{l \cdot c}{b}$$

где H – высота дома, l – длина пальца, c – расстояние от человека до дома, b – длина руки (см. рис. 27).

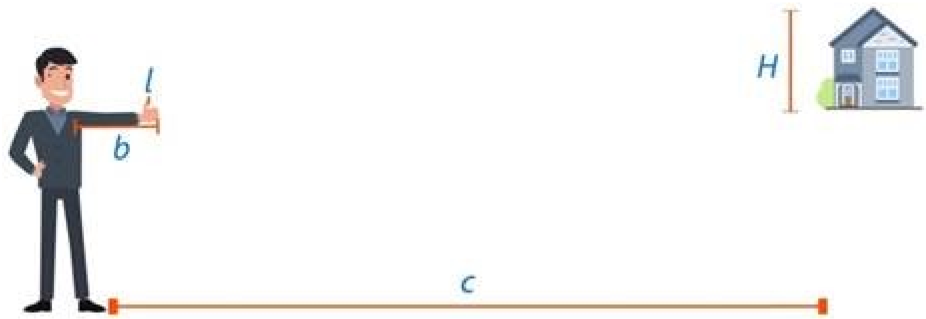


Рис. 27. Зная параметры своего тела и измерив расстояние до дома, можно найти высоту дома

Как получилась эта формула? Это следствие подобия прямоугольных треугольников с общим острым углом – CAB и CA_1B_1 (см. рис. 28).

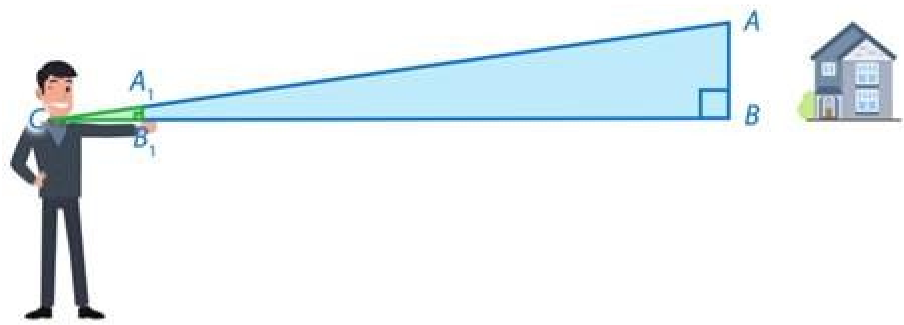


Рис. 28. Подобные треугольники CAB и CA_1B_1 с общим острым углом

Действительно, у подобных треугольников стороны пропорциональны, значит:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CB_1}{CB}$$

Для нас сейчас важен следующий вывод: какой бы прямоугольный треугольник с острым углом α мы ни взяли, отношение длин любых двух его сторон будет одинаковым. Действительно, любые два прямоугольных треугольника с равным острым углом будут подобны. Значит, все такие треугольники будут подобны и отношение длин сторон у всех у них будет одинаковым (см. рис. 29).

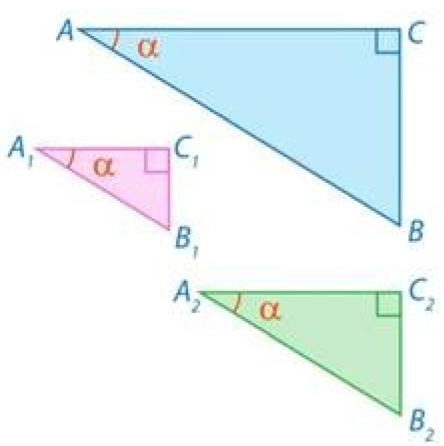


Рис. 29. Подобные прямоугольные треугольники с равными острыми углами

Получается, что угол α можно определить через отношение длин сторон соответствующего прямоугольного треугольника. Действительно, каждому острому углу α можно поставить в соответствие, например, отношение длины противолежащего ему катета к прилежащему катету прямоугольного треугольника, содержащего этот острый угол (см. рис. 30).

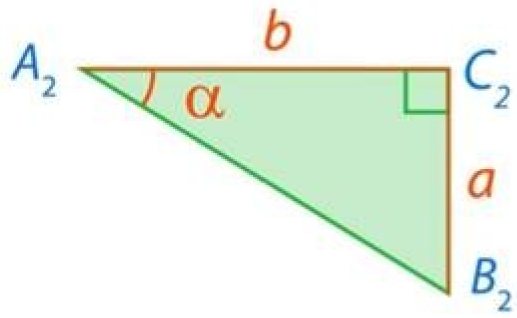


Рис. 30. Каждому острому углу α прямоугольного треугольника можно поставить в соответствие отношение длины противолежащего ему катета к прилежащему

При этом такое отношение будет одинаковым и не будет зависеть от размеров прямоугольного треугольника, а значит, мы получили функцию:

$$f(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Но мы пока не ответили на другой важный вопрос: можно ли по отношению $\frac{a}{b}$ однозначно восстановить острый угол α? Действительно, вдруг есть другой прямоугольный треугольник с острым углом β, в котором:

$$f(\beta) = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} = k$$

Рассмотрим эти два треугольника с углами α и β (см. рис. 31).

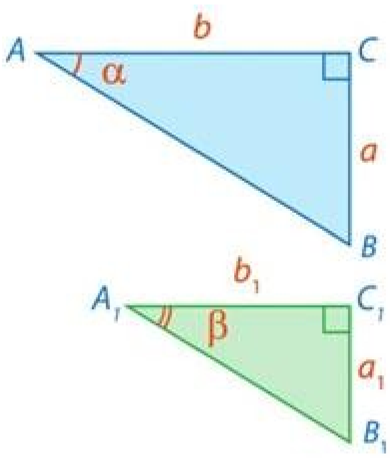


Рис. 31. Прямоугольные треугольники ABC, где $f(\alpha) = \frac{a}{b}$, и $A_1B_1C_1$, где $f(\beta) = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} = k$

В них равны прямые углы, а стороны, образующие эти прямые углы, пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

Тогда эти треугольники подобны, значит, их углы равны, поэтому $\alpha = \beta$.

Итак, *острый угол прямоугольного треугольника можно однозначно определить через отношение длин сторон этого прямоугольного треугольника*.

Мы ввели в качестве примера такую функцию угла – отношение противолежащего катета к прилежащему катету (см. рис. 32). Такая функция называется **тангенсом угла**:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{a}{b}}$$

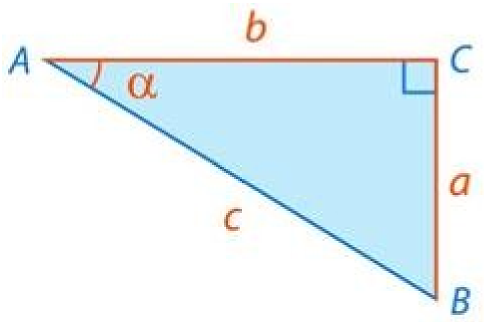


Рис. 32. Тангенс – отношение противолежащего катета a к прилежащему катету b

Понятно, что мы могли ввести обратное отношение – прилежащего катета к противолежащему катету. Такую функцию называют **котангенсом угла**:

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{b}{a}}$$

Поскольку в подобных треугольниках пропорциональны любые пары сторон, то можно было взять для эквивалентного определения острого угла не только отношение катетов, но и отношение катета и гипотенузы.

Отношение противолежащего катета к гипотенузе называется **синусом угла** (см. рис. 33):

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

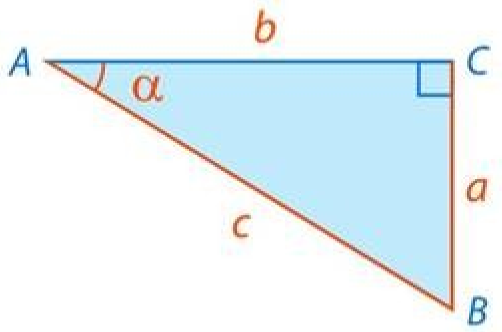


Рис. 33. Синус – отношение противолежащего катета к гипотенузе

Отношение прилежащего катета к гипотенузе называется **косинусом угла** (см. рис. 34):

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

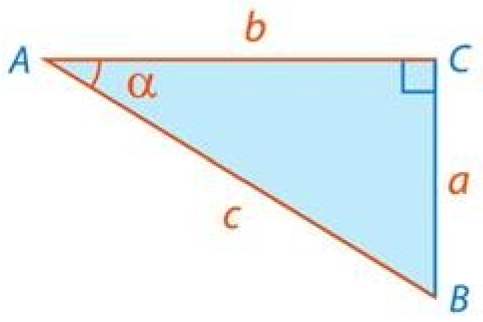


Рис. 34. Косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе

Можно было бы ввести еще две функции: отношение гипотенузы к катетам (они называются *секансом* и *косекансом*), но они почти не используются на практике:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

Все введенные нами функции имеют общее название – **тригонометрические функции**.

Значения тригонометрических функций

Найдем значения тригонометрических функций нескольких самых распространенных острых углов (см. рис. 35).

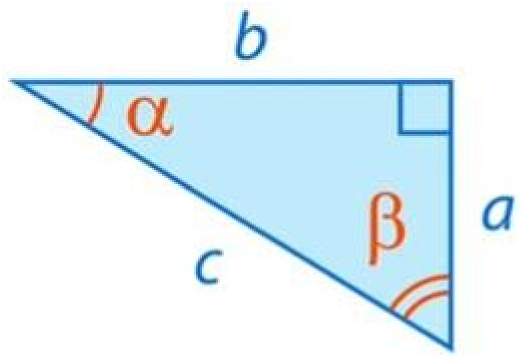


Рис. 35. Прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острыми углами α и β

Решение этой задачи нам облегчит следующий факт: синус одного острого угла прямоугольного треугольника равен косинусу другого. Аналогично тангенс альфа равен котангенсу бета.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = ctg\beta$$

Или по-другому:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$tg\alpha = ctg(90° - \alpha)$$

Доказать эти утверждения несложно, используя определения и тот факт, что катет, являющийся прилежащим для одного из острых углов, является противолежащим для другого и наоборот.

Начнем с угла $30°$. Рассмотрим соответствующий прямоугольный треугольник (см. рис. 36).

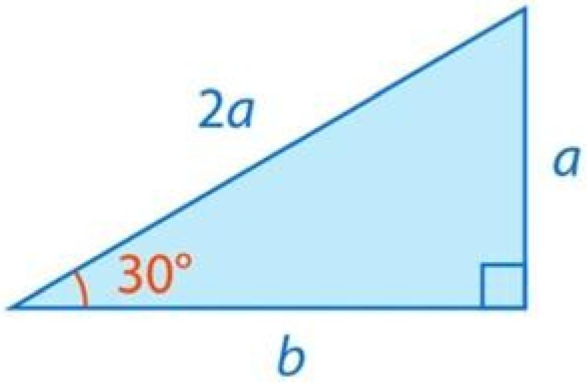


Рис. 36. Прямоугольный треугольник с острым углом, равным $30°$

Мы знаем, что катет, лежащий против угла в $30°$ равен половине гипотенузы. Следовательно, по определению:

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Чтобы найти значение остальных функций по определению, нам понадобится длина второго катета. Найдем ее, используя доказанную ранее теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$(2a)^2 = a^2 + b^2$$

Откуда:

$$b^2 = 3a^2$$

$$b = a\sqrt{3}$$

Тогда:

$$\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30° = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Для угла $60°$ найти значения функций не составит труда, используя формулы, которые мы перед этим доказали:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$tg\alpha = ctg(90° - \alpha)$$

Или же вы можете сами это сделать, используя определение и уже готовый рисунок (см. рис. 37).

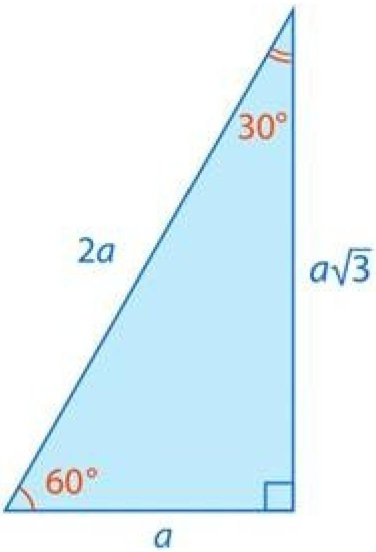


Рис. 37. Прямоугольный треугольник с катетами a и $a\sqrt{3}$, гипотенузой $2a$ и острыми углами $30°$ и $60°$

Итак:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = ctg30° = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Рассмотрим теперь угол $45°$. Т. к. один острый угол прямоугольного треугольника равен $45°$, то и второй тоже равен: $90° - 45° = 45°$. И прямоугольный треугольник является равнобедренным (см. рис. 38).

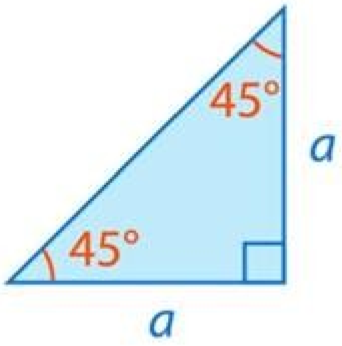


Рис. 38. Прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными a

Если катеты этого треугольника равны a, то, по теореме Пифагора:

$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$c = a\sqrt{2}$

Получаем:

$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg 45^\circ = ctg 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$

Подведем итог и посмотрим на все значения найденных нами тригонометрических функций (см. рис. 39).

Угол / Функции угла	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Рис. 39. Значения тригонометрических углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

Понятно, что для нахождения тригонометрических функций углов $30°, 45°, 60°$ мы использовали свойства прямоугольных треугольников с такими острыми углами.

Вычисление длин сторон и градусной меры углов прямоугольного треугольника

Может возникнуть вопрос: мы ввели тригонометрические функции, умеем вычислять их значения – и как это поможет нам измерять углы? Зачем они вообще нужны? Предположим, что мы знаем острый угол и сторону прямоугольного треугольника. Раньше по этим данным мы бы не могли найти длины остальных сторон (кроме частных случаев – когда треугольник равнобедренный с углами по $45°$ или когда в нем есть угол $30°$ градусов). Теперь это сделать несложно.

Рассмотрим конкретный пример: дан треугольник с углом $35°$ и гипотенузой 5 (см. рис. 42).

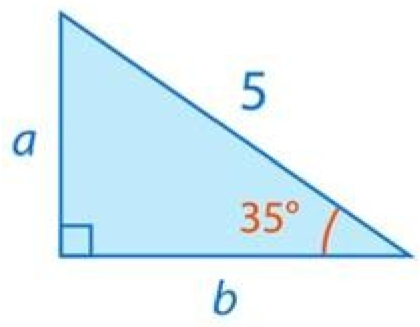


Рис. 42. Прямоугольный треугольник с углом $35°$ и гипотенузой 5

Найдем длины катетов этого треугольника. Используем определение синуса:

$$\sin 35° = \frac{a}{c} = \frac{a}{5}$$

Откуда:

$$a = 5 \cdot \sin 35° \approx 5 \cdot 0{,}5736 = 2{,}87$$

Второй катет можно найти либо используя определение косинуса, либо используя теорему Пифагора.

Кроме того, зная длины сторон прямоугольного треугольника, теперь мы умеем вычислять значения его углов. Например, в египетском треугольнике, о котором мы говорили в начале урока, стороны равны $3, 4, 5$ (см. рис. 43). Найдем острые углы этого треугольника.

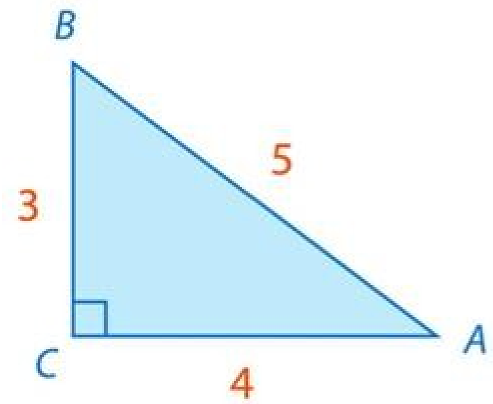


Рис. 43. Египетский треугольник

Синус угла, который лежит против катета с длиной 3, равен:

$$\sin A = \frac{CB}{BA} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Осталось найти, какому острому углу соответствует этот синус. Для этого в калькуляторе нужно использовать функцию, обратную вычислению синуса:

$$\arcsin 0{,}6 \approx 37°$$

Значит, второй острый угол будет равен приблизительно:

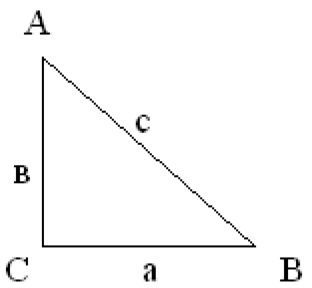
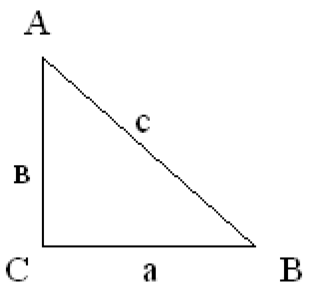
$$90° - 37° = 53°$$

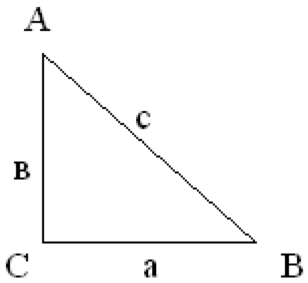
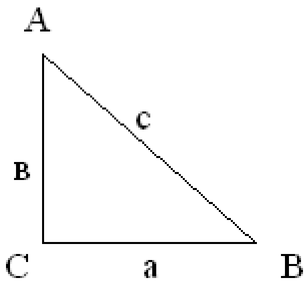
4. Решение прямоугольных треугольников.

Решить прямоугольный треугольник- значит по заданным двум сторонам либо стороне и острому углу найти другие его стороны и углы.

Разбираем следующие виды задач, в которых требуется решить прямоугольный треугольник:

1) по катетам;
2) по гипотенузе и катету;
3) по гипотенузе и острому углу;
4) по катету и острому углу.

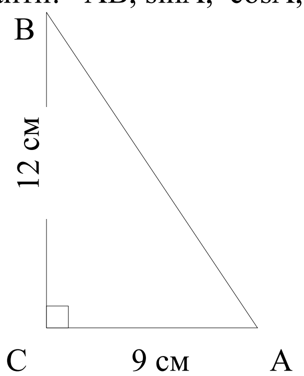
	Условие задачи			Алгоритм решения
1			Дано: AC=в, BC=a. Найти: AB, <A, <B.	1)AB= $\sqrt{a^2+b^2}$, 2) tgA= $\frac{a}{в}$; 3) <B=90º - <A.
2			Дано: AB=c, BC=a. Найти: AC, <A, <B.	1)AC= $\sqrt{c^2-a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$; 3) <B=90º - <A.

3			Дано: AB=c, <A=α Найти: AC,BC, <B.	1) <B=90º - <A, 2) AC=c·cosα, 3) BC=c·sinα.
4			Дано: <A=α, BC=a. Найти: AC, AB, <B.	1) <B=90º - <A, 2) AB= $\frac{a}{\sin\alpha}$, 3) AC= $\frac{a}{tg\alpha}$.

ЗАДАЧА № 1.

Дано: AC=9см, BC=12см.

Найти: AB, sinA, cosA, tgA.



Решение:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$AB = \sqrt{225} = 15$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$tg\ A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Для вычисления величины угла A воспользуемся таблицей.

Для нахождения величины угла B вспомним свойство острых углов прямоугольного треугольника (их сумма равна 180º).

IV. Контроль и коррекция знаний

Домашнее задание на 23.05.2020

учебник § 7 п.62 – 70 повторить теоретический материал

1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90^0, угол *A* равен 30^0, *AB*=100 см. Найдите *BC*.
2. В треугольнике *ABC AC* = *BC*, высота *AH* равна 13 см, угол *C* равен 30^0. Найдите *AC*. Дайте ответ в сантиметрах.
3. В треугольнике *KPM* угол *M* равен 90^0, *MP*=5 см, *KM*=12 см, *KP*=13 см. Чему равен sin *K* ?

4. В треугольнике KPM угол M равен 90^0, MP=4 см, KM=3 см, KP=5 см. Чему равен $tg\ K$?
5. В треугольнике KMP угол M равен 90^0, $\sin K =$. Чему равен $\cos P$?
6. В треугольнике ABC угол C равен 90^0, BC=14 см, $\sin A =$. Найдите AB.

Фото/или скриншот **домашнего** задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru