муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края
357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	18.05.2020
Тема урока	Площади тел вращения. Цилиндр, конус
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята! *На этом уроке мы вспомним основные сведения о цилиндре и конусе, решим типовые задачи на них.*

II. Обобщение и систематизация материала

Основные сведения о цилиндре

Цилиндр – тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.

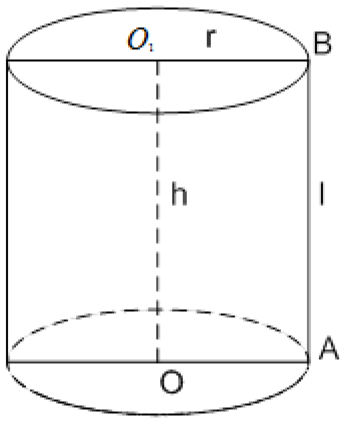

Рис. 1. Цилиндр

Прямоугольник ABO_1O (рис. 1) будем вращать относительно прямой O_1O, каждая точка отрезка AB опишет окружность радиуса *r*, таким образом мы получим цилиндр.

Прямоугольник задают два элемента, например сторона BO_1 и сторона AB. Так же и цилиндр задают два элемента $BO_1 = r$ – радиус цилиндра, $AB = l$ – образующая цилиндра, равная высоте цилиндра ($l = h$).

Если развернуть цилиндр, то получим прямоугольник (рис. 2), у которого одна сторона равна $B'B = 2\pi r$ (длина окружности основания), а другая сторона равна $AB = h$ (высота цилиндра).

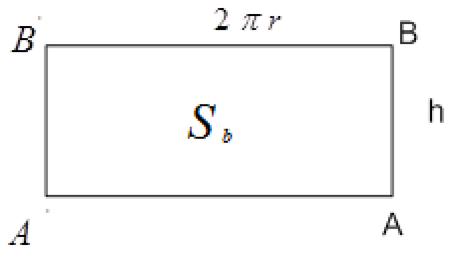

Рис. 2. Развернутый цилиндр

Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$S_b = 2\pi rh$

Площадь основания цилиндра:

$S_o = \pi r^2$

Площадь полной поверхности цилиндра:

$S_c = S_b + 2S_o = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

Объём цилиндра находим по формуле:

$V_c = \pi r^2 h$

Задача 1 (нахождение высоты и радиуса основания цилиндра

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен $60°$. Найти: а) высоту цилиндра; б) радиус основания цилиндра.

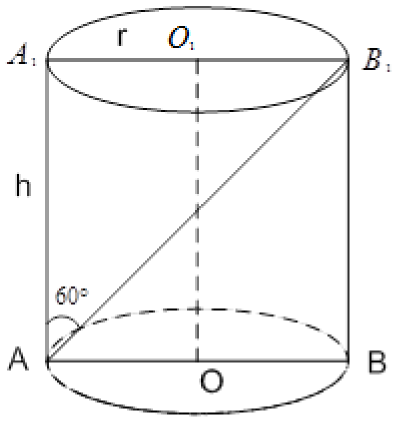

Рис. 3. Иллюстрация к задаче

Дано: $AB_1 = 48$ см; $\angle A_1AB_1 = 60°$ (рис. 3)

Найти: а) $AA_1 = h$; б) $O_1A_1 = r$

Решение:

В осевом сечении цилиндра лежит прямоугольник AA_1B_1B, в котором сторона $AA_1 = h$ – высота цилиндра; $A_1B_1 = 2r$ – диаметр основания цилиндра.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAA_1B_1. В нём заданы два элемента: гипотенуза $AB_1 = 48$ см и $\angle A_1AB_1 = 60°$, следовательно:

а) $AA_1 = h = AB_1 \cdot \cos\angle A_1AB_1$

$AA_1 = h = 48 \cdot \cos 60° = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$ см

б) $A_1B_1 = 2r = AB_1 \cdot \sin\angle A_1AB_1$

$A_1B_1 = 2r = 48 \cdot \sin 60° = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$O_1A_1 = r = \frac{A_1B_1}{2}$

$O_1A_1 = r = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ см

Ответ: а) $AA_1 = h = 24$ см; б) $O_1A_1 = r = 12\sqrt{3}$ см

Основные сведения о конусе

Конус – тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.

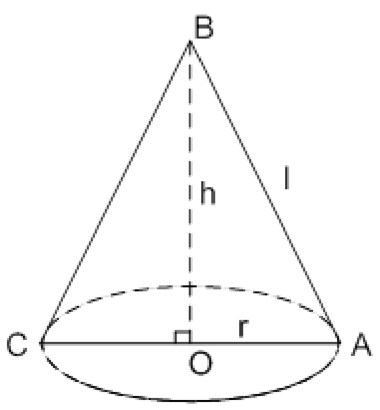

Рис. 4. Иллюстрация к задаче

Прямоугольный треугольник ΔAOB (рис. 4) вращаем около прямой *BO* (катета треугольника), получаем фигуру, которая называется конусом.

Треугольник задаётся двумя элементами, например катетом и гипотенузой, этих же элементов достаточно, чтобы задать конус.

Катет $\Delta AOB\ \ OA = r$ – радиус основания конуса, катет $\Delta AOB\ \ BO = h$ – высота конуса, гипотенуза $\Delta AOB\ \ AB = l$ – образующая конуса. Между этими величинами связь по теореме Пифагора:

$$l^2 = r^2 + h^2$$

Если развернуть конус, то получим сектор (рис. 5) радиус сектора – это образующая *l* конуса, длина дуги сектора равна $2\pi r$ – это длина окружности основания.

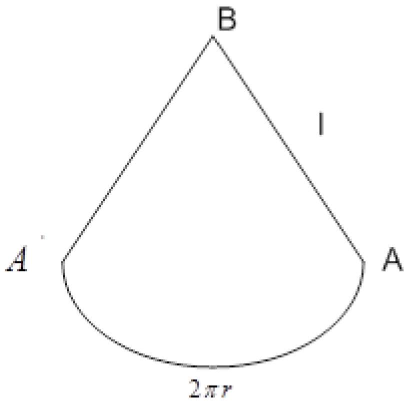

Рис. 5. Иллюстрация к задаче

Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади сектора:

$$S_b = S_{sec} = \pi l^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi l} = \pi r l$$

В основании конуса лежит круг, следовательно, площадь основания конуса равна:

$$S_o = \pi r^2$$

Объём конуса находим по формуле:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

[Задача 2 (нахождение площади осевого сечения конуса)]

Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найти площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

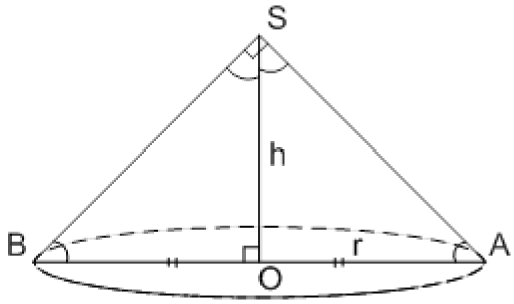

Рис. 6. Иллюстрация к задаче

Дано: $\angle ASB = 90°$; $r = OA = 5$ см (рис. 6)

Найти: S_{ASB}

Решение:

Так как в осевом сечении всегда лежит равнобедренный треугольник, то ΔABS – прямоугольный равнобедренный треугольник ($SB = SA$).
Следовательно, $\angle SBO = \angle SAO = 45°$.

Медиана *SO* в прямоугольном треугольнике, опущенная из прямого угла, равна половине гипотенузы:

$SO = OA = OB = 5$ см

Так как треугольник равнобедренный, то медиана равна высоте, следовательно:

$h = r = 5$ см

Площадь треугольника ΔABS равна:

$S_{ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot OS$

$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$ см^2

Ответ: $S_{ASB} = 25$ см^2

Основные сведения о усечённом конусе

Если провести сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, то эта плоскость разбивает конус на две части, одна из которых – конус, а другую часть называют усечённым конусом (рис. 7).

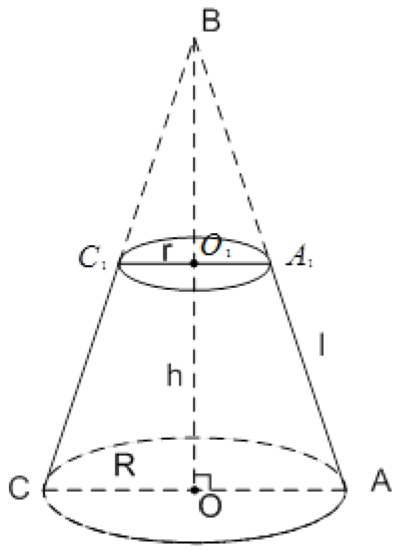

Рис. 7. Усеченный конус

Верхнее основание усечённого конуса – окружность радиусом *r*, нижнее основание усечённого конуса – окружность радиусом *R*. $OO_1 = h$ – высота усечённого конуса. $AA_1 = l$ – образующая конуса.

Осевое сечение усечённого конуса – равнобедренная трапеция, где *l* – боковые стороны трапеции (рис. 8).

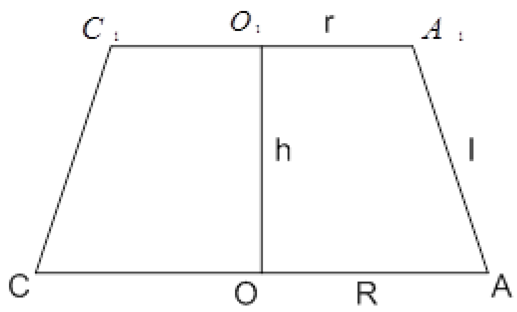

Рис. 8. Трапеция

Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна:

$$S_b = \pi(R + r)l$$

Объём усечённого конуса находим по формуле:

$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\right)$, где $S = \pi R^2$ – площадь верхнего основания усечённого конуса, $S_1 = \pi r^2$ – площадь нижнего основания усечённого конуса.

Задача 3 (нахождение образующей усечённого конуса)

Найти образующую усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.

Дано: $r = 3$ см; $R = 6$ см; $h = 4$ см (рис. 7).

Найти:/

Решение:

Осевое сечение усечённого конуса – равнобедренная трапеция (рис. 9), в которой нам нужно найти боковую сторону.

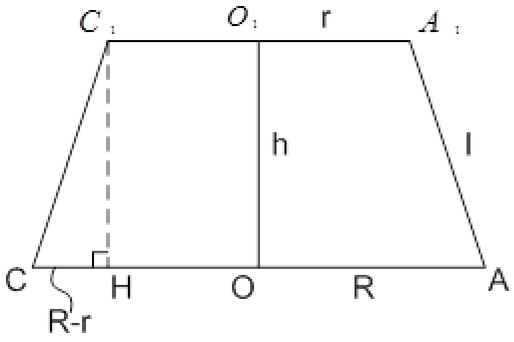

Рис. 9. Иллюстрация к задаче

Рассмотрим ΔCC_1H. Он получается путём опускания перпендикуляра из точки C_1 на *AC*. В ΔCC_1H известен катет C_1H:

$C_1H = h = 4$ см

Катет CH:

$CH = R - r = 6 - 3 = 3$ см.

По теореме Пифагора находим гипотенузу CC_1, которая будет равна образующей конуса.

$$CC_1 = l = \sqrt{C_1H^2 + CH^2}$$

$$CC_1 = l = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}$$

Ответ: $l = 5$ см

III. Домашнее задание на 20.05.2020

Учебник Глава 6 П. 59-63 повторить

1. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

2. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.

3. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найти радиус основания и высоту конуса.

4. В усеченном конусе отношение площадей оснований равно 4, образующая имеет длину l и составляет с плоскостью большего основания угол γ. Найти объем усеченного конуса.

Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края

357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	18.05.2020
Тема урока	Круглые тела. Сфера
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята! Этот урок посвящён повторению темы «Сфера». На нём мы вспомним определение сферы, уравнение сферы, площадь сферы, а также объём шара, который ограничивает сфера. Рассмотрим касательную и секущую прямую, плоскость к сфере. Далее решим несколько задач, в которых будем находить элементы рассматриваемого круглого тела

II. Обобщение и систематизация материала

Определение сферы и основные формулы

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Такая точка называется центром сферы, расстояние от данной точки до всех точек – радиусом сферы.

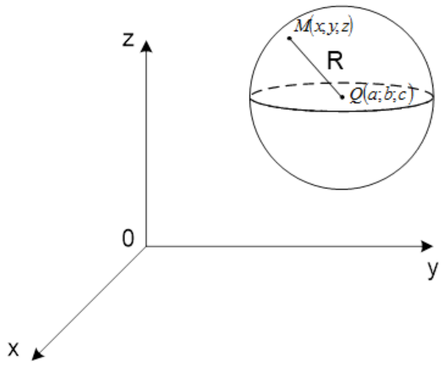

Рис. 1. Сфера в координатной плоскости

Запишем уравнение сферы, для этого построим оси координат (рис. 1). Точка $Q(a;b;c)$ – центр сферы, *R* – радиус сферы, то есть расстояние от точки Q до произвольной точки $M(x;y;z)$, лежащей на сфере.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Шар описывается следующим неравенством: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2$.

Площадь сферы находится по формуле: $S_{sf}=4\pi R^2$.

Объём шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Касательная и секущая плоскость, их свойства

Рассмотрим касательную плоскость к сфере. Плоскость α называется касательной к сфере, если она со сферой имеет только одну общую точку (точку касания) (рис. 2).

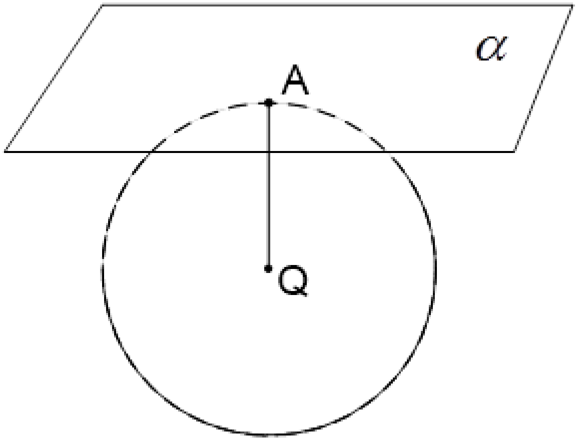

Рис. 2. Касательная плоскость к сфере

Плоскость является касательной к сфере тогда и только тогда, когда радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к плоскости: $\alpha \cap (Q; R) = A \Leftrightarrow QA \perp \alpha$.

Рассмотрим секущую плоскость. Построим сферу и оси координат (рис. 3). Плоскость, перпендикулярная оси *z* и проходящая через точку $M(0; 0; d)$, рассекает плоскость по окружности. Докажем это.

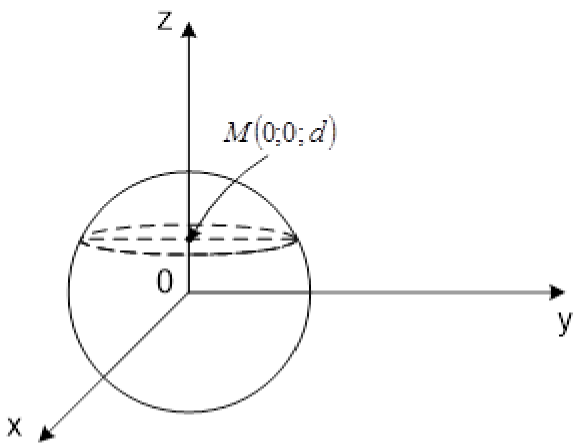

Рис. 3. Секущая плоскость

Запишем систему уравнений, состоящую из уравнения сферы (центр сферы – начало координат) и перпендикулярной оси z плоскости: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = d \end{cases}$.

Подставим *z* в первое уравнение: $x^2 + y^2 = R^2 - d^2 = r^2$. Получили формулу окружности.

Секущая и касательная прямая и их свойства

Дана сфера и точка *A* вне сферы (рис. 4). *AT* – касательная прямая к плоскости, *AB* – секущая прямая (точки *C* и *B* – общие для сферы и для прямой *AB*), *AC* – внешняя часть секущей *AB*; AB_1 – секущая прямая, AC_1 её внешняя часть.

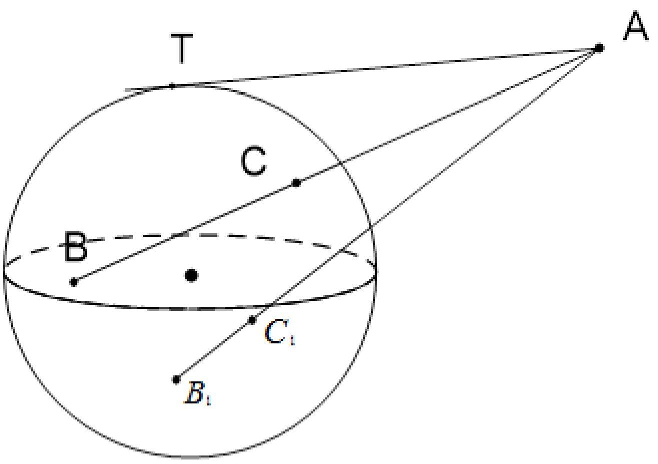

Рис. 4. Секущая и касательная прямая

Запишем теорему для секущих и касательных прямых к сфере: произведение секущей на внешнюю часть есть величина постоянная, равная квадрату касательной $AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1 = AT^2$.

Задача 1 (нахождение касательной к сфере)

Дано: $AB = 16$; $BC = 7$ (рис. 4).

Найти: AT.

Решение:

Найдём внешнюю часть касательной.

$$AC = AB - BC = 16 - 7 = 9$$

По теореме о секущих и касательных прямых: $AT = \sqrt{AB \cdot AC}$.

$$AT = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12$$

Ответ: $AT = 12$.

Задача 2 (определение уравнения сферы и нахождение радиуса окружности в сечении этой сферы)

2.1. Напишите уравнение сферы с центром в точке $Q(1; 2; 3)$ радиуса $R = 5$.

Решение:

Уравнение сферы в общем виде: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, где *(a;b;c)* – координаты центра сферы.

Следовательно, уравнение данной нам сферы выглядит так: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$.

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

Ответ: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

2.2. Найдите радиус окружности в сечении данной сферы плоскостью (xy).

Решение:

Уравнение данной сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$, а уравнение плоскости (xy) – это $z=0$.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25\\ z=0\end{cases}$$

Подставляем в первое уравнение значение z: $(x-1)^2+(y-2)^2+(0-3)^2=25$.

$(x-1)^2+(y-2)^2=16$

$(x-1)^2+(y-2)^2=4^2$

Получили уравнение окружности в сечении данной сферы, следовательно, радиус этой окружности равен 4.

Ответ: 4.

Задача 3 (нахождение радиуса сферы и координат центра сферы)

Найдите координаты центра и радиус сферы $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$.

Решение:

Решение будет осуществляться с помощью выделения полного квадрата.

$x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$

$$x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2y\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+z^2-2z\cdot1+1^2-1^2=\frac{5}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{10+1+9+4}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=6$$

Получили уравнение сферы, из которого видим, что координаты центра сферы $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$, а радиус сферы равен $\sqrt{6}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$; $\sqrt{6}$.

Задача 4 (нахождение расстояния от центра сферы до плоскости)

Дано: точки *A, B, C* лежат на сфере радиуса 13; $AB = 10, BC = 8, CA = 6$.

Найти: расстояние от центра сферы до плоскости *ABC.*

Решение

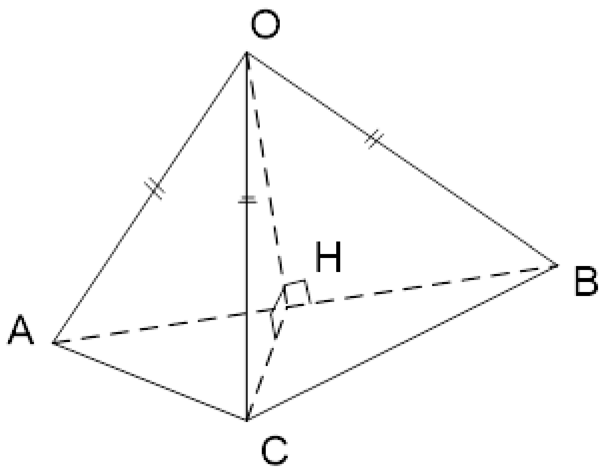

Рис. 5. Иллюстрация к задаче №4

На рис. 5 изображены данные нам элементы. $OA = OC = OB = R = 13$ – радиус сферы (*O* – центр сферы). Стороны получившегося ΔABC нам известны. Мы получили пирамиду, у которой все рёбра известны, нужно найти расстояние от точки *O* до плоскости *ABC*.

OH – искомое расстояние, то есть высота пирамиды, найдём место расположения точки *H*. Мы получили три равных прямоугольных треугольника: $\Delta OHA = \Delta OHB = \Delta OHC$ (по катету *OH* и гипотенузе). Следовательно, $HA = HB = HC$, то есть точка *H* – центр описанной около ΔABC окружности. ΔABC прямоугольный, так как $AB^2 = BC^2 + CA^2$.

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника – середина гипотенузы, следовательно, точка *H* – середина *AB* и высота проектируется в эту точку.

$$HA = HB = HC = \frac{1}{2}AB = \frac{10}{2} = 5$$

Из прямоугольного ΔOHA, по теореме Пифагора, найдём *OH*: $OH = \sqrt{OA^2 - HA^2}$.

$$OH = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

Ответ: 12.

I. Домашнее задание на 25.05.2020

Учебник Глава 6 П. 64-68 повторить Решить задачи стр. 151 № 578, 580, 582

1. **Выполните тестирование на ЯКлассе , пройдя по ссылке, отправленной на адрес Вашей электронной почты**

Тест расположен на портале ЯКласс, **доступен с 22.05 10:00 по 24.05 18:00** содержит 4 задания , по времени не более 20 минут. ***Две попытки, засчитывается лучший результат*** Рекомендуется выполнять во второй половине дня, когда портал испытывает меньшую нагрузку

Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru