муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края
357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	25.05.2020
Тема урока	Повторение: Векторы в пространстве
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята! *На этом уроке мы вспомним основные сведения о векторах: что такое вектор, какие векторы называются коллинеарными. Также рассмотрим умножение вектора на число, правила сложения векторов, теоремы о разложении векторов на плоскости и в пространстве. Далее с помощью векторов решим несколько задач*

II. Обобщение и систематизация материала

Откройте учебник на стр.84 и повторите теоретический материал Главы 4

Сложение векторов, умножение вектора на число

В окружающем мире мы встречаемся с такими величинами, для которых важен не только размер, но и направление. Такими величинами являются, например, сила и скорость. В математике такие величины описываются векторами.

Вектор – направленный отрезок.

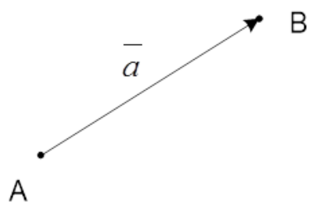


Рис. 1. Вектор

Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$ (рис. 1).

Коллинеарными векторами называются такие векторы, которые лежат на параллельных прямых либо на одной прямой. $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (рис. 2).

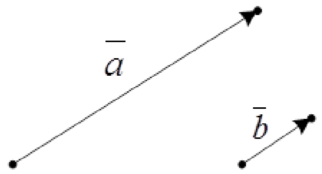


Рис. 2. Коллинеарные векторы

Можно ввести такое число λ, при котором $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$ (рис. 3). То есть умножением вектора на какое-либо число λ, можно растянуть или сжать вектор.

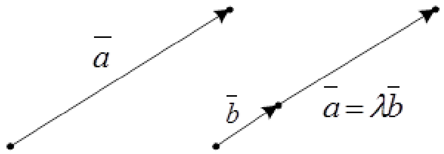


Рис. 3. Умножение вектора на число

Если векторы коллинеарные и сонаправленные и их длины равны, то такие векторы называются равные: $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \\ |\bar{a}| = |\bar{b}| \end{cases}$.

Рассмотрим сложение векторов.

1. Правило параллелограмма (рис. 4).

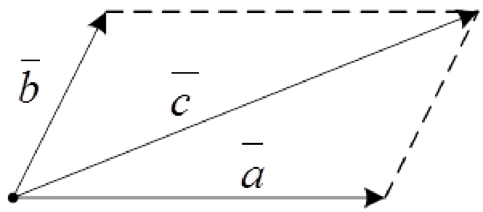


Рис. 4. Сложение векторов

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$

2. Правило треугольника (рис. 5).

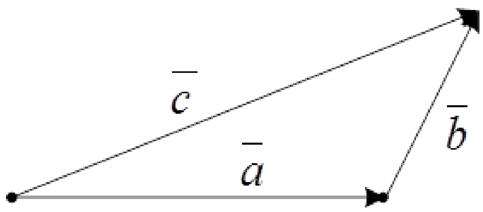


Рис. 5. Сложение векторов

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$

Векторы на плоскости

Рассмотрим векторы на плоскости. Для этого нам необходима пара неколлинеарных векторов ($\bar{a} \nparallel \bar{b}$).

Теорема: на плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом. То есть существует единственная пара чисел *x* и *y*, при которой $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b}$ (рис. 6).

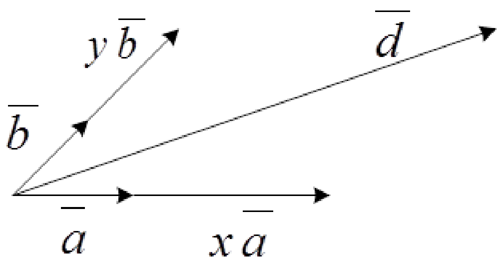


Рис. 6. Иллюстрация к теореме

Векторы в пространстве

Рассмотрим векторы в пространстве. Для этого необходимо выбрать три некомпланарных вектора ($\bar{a} \nparallel \bar{b}; \bar{c} \notin (AOB)$).

Теорема: в пространстве любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются однозначно: $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

То есть вектор $\bar{d}$ однозначно разлагается по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с помощью чисел *x, y, z* (эта тройка чисел однозначная).

Объясним эту теорему (рис. 7).

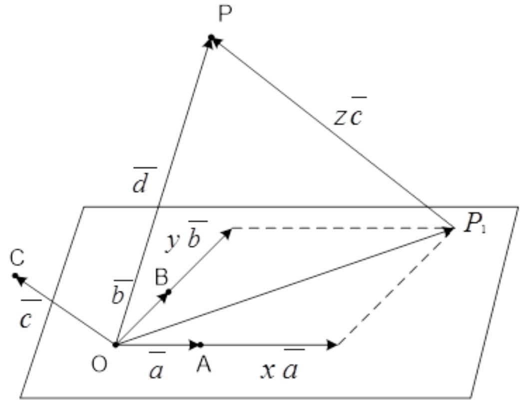


Рис. 7. Иллюстрация к объяснению теоремы

Проведём $P_1P \parallel OC$, получим точку пересечения P_1 с плоскостью AOB.

Следовательно, $\bar{d} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P}$, но, по правилу параллелограмма, $\overline{OP_1} = x\bar{a} + y\bar{b}$, а так как вектор $\overline{P_1P} \parallel \bar{c}$, то $\overline{P_1P} = z\bar{c}$. Поэтому $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

Задача 1 на доказательство определённого соотношения отрезков

M – точка пересечения медиан в треугольнике *ABC*. Точка *O* – произвольная точка. Доказать, что $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Дано: *M* – точка пересечения медиан (рис. 8).

Доказать: $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Доказательство (1 способ)

Выразим *OM* через векторы:

$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$

$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$

$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM}$

Складываем эти три соотношения: $3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + (\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM})$.

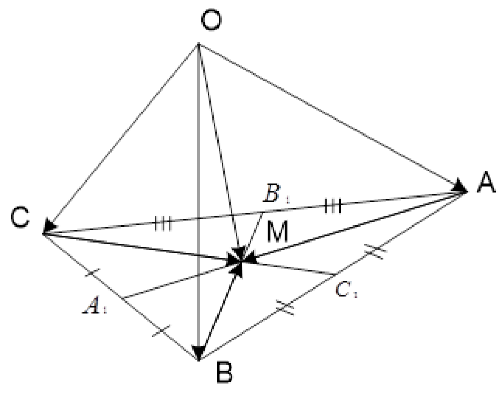


Рис. 8. Иллюстрация к задаче №1

$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = -(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$

$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$

Докажем, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$. По свойству, точка пересечения медиан треугольника рассекает каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. То есть $AA_1 = m_a$; $AM = \frac{2}{3}m_a$; $MA_1 = \frac{1}{3}m_a$. Продлим медиану AA_1 и отложим отрезок $A_1D = MA_1$ (рис. 9).

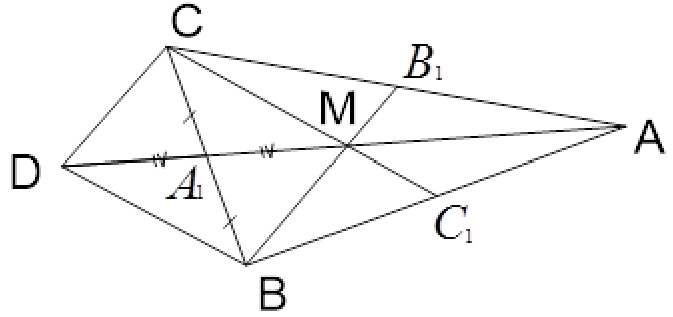


Рис. 9. Иллюстрация к задаче №1

Получили четырёхугольник *MBDC*. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, *MBDC* – параллелограмм. Поэтому $\overline{MD} = \overline{MB} + \overline{MC}$.

$MA = MD$, поэтому $\overline{MA} = -\overline{MD}$.

Подставим эти данные в выражение $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$,

получим $-(\overline{MB} + \overline{MC}) + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$.

$0 = 0$

Отсюда $3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство (2 способ)

Выразим *OM* через вектор: $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$.

$\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AA_1}$ - по свойству точки пересечения медиан треугольника.

$\overline{AA_1} = -\overline{OA} + \overline{OA_1}$

$$\overline{OA_1} = \overline{OB} + \overline{BA_1} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{OB} + \frac{1}{2}(\overline{OC} - \overline{OB}) = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC})$$

$$\overline{OM} = \overline{OA} - \frac{2}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2 на доказательство пересечения прямой и плоскости

Дан параллелепипед AC_1 (рис. 10). *M* – точка пересечения медиан в $\Delta\, BDA_1$. Доказать: 1) диагональ AC_1 пересечёт плоскость BDA_1 в точке *M*; 2) $\frac{AM}{AC_1} = \frac{1}{3}$.

Доказательство

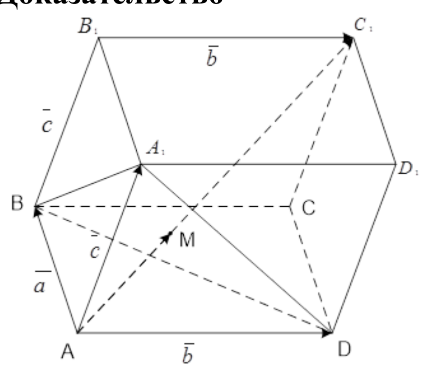


Рис. 10. Иллюстрация к задаче №2

Вводим тройку некомпланарных векторов. Пусть $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, $\overline{AA_1} = \bar{c}$, через эти векторы можно выразить все остальные нужные нам векторы: $\overline{AC_1} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

Благодаря доказательству в задаче 1, знаем, что $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

$\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC_1}$

Вектор $\overline{AM}$ и $\overline{AC_1}$ коллинеарные, они имеют общую точку *A*, следовательно, точки *A, M,* C_1 лежат на одной прямой, поэтому прямая AC_1 пересекает плоскость BDA_1 в точке *M* ($AC_1 \cap BDA_1 = M$). Что и требовалось доказать.

Отношение $\frac{AM}{AC_1} = \frac{1}{3}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 3 на доказательство равенства отрезков

Дан параллелепипед AC_1 (рис. 11). *M* и *N* – точки пересечения медиан в $\Delta\, BDA_1$ и $\Delta\, B_1D_1C$. Доказать, что $AM = MN = NC_1$.

Доказательство

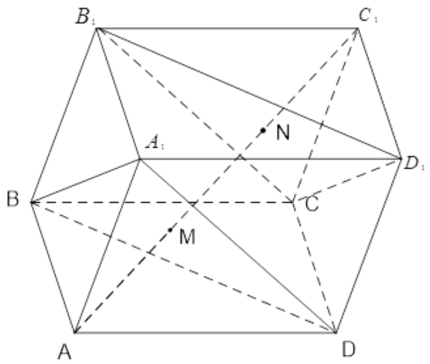


Рис. 11. Иллюстрация к задаче №3

В задаче 2 мы доказали, что диагональ AC_1 пересекает $\Delta\, BDA_1$ в точке пересечения медиан и $\frac{AM}{AC_1} = \frac{1}{3}$. Следовательно, $AM = \frac{1}{3}AC_1$.

Аналогично из точки C_1 исходят три ребра, концы которых образовывают второй $\Delta\, B_1D_1C$.

Диагональ AC_1 пересекает этот треугольник в точке пересечения медиан и $C_1N = \frac{1}{3}AC_1$.

Средняя часть диагонали AC_1 равна $MN = AC_1 - AM - C_1N = AC_1 - \frac{1}{3}AC_1 - \frac{1}{3}AC_1 = \frac{1}{3}AC_1$.

Следовательно, $AM = MN = NC_1 = \frac{1}{3}AC_1$.

Что и требовалось доказать.

С помощью векторов мы получили важное свойство произвольного параллелепипеда: из каждого конца диагонали параллелепипеда исходят три ребра. Треугольники, образованные концами этих рёбер, пересекается диагональю параллелепипеда в точке пересечения медиан. При этом диагональ делится на три равные части.

III. Домашнее задание на 27.05.2020

Учебник Глава 4 П. 38-45 повторить Решить задачи №№ 333, 344, 356, 377, 379

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка D. Доказать, что центры тяжестей $\Delta\, ABC,\ \Delta\, ABD$ и $\Delta\, BCD$ лежат на одной прямой.

2. На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $|\overline{AM}| = \frac{1}{4}|\overline{AC}|$, а на продолжении стороны *BC* такая точка *N*, что $|BN| = |\overline{BC}|$. В каком отношении точка *P* пересечения *AB* и *MN* делит каждый из этих отрезков.

Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края
357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	27.05.2020
Тема урока	Круглые тела. Сфера
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята!

II. Обобщение и систематизация материала

Прямоугольная система координат в пространстве (при необходимости прочитай п. 46).
Координаты вектора, действия с ними (при необходимости прочитай п. 47).
Связь между координатами вектора и координатами точки (при необходимости прочитай п. 48).
Задачи в координатах (при необходимости прочитай п. 49).
Угол между векторами (при необходимости прочитай п. 50).
Скалярное произведение векторов (при необходимости прочитай п. 51).
Вычисление углов между прямыми и плоскостями (при необходимости прочитай п.52).

1. **Познакомься с решением задач. Это поможет при выполнении следующих заданий.**

Задача 6. Найдите угол между медианами, проведёнными к катетам равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. Пусть OAB — данный треугольник с катетами $OA=OB=1$, AD и BK — его медианы, φ — угол между ними, т. е. угол между прямыми, на которых лежат медианы. Введём систему координат, как показано на рисунке 8.4.

Тогда $A(0;1)$, $B(1;0)$, $K(0;0{,}5)$, $D(0{,}5;0)$, поэтому

$$\overrightarrow{AD}\{0{,}5;\ -1\},\ \overrightarrow{KB}\{1;\ -0{,}5\},$$

$$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{KB}|=\frac{\sqrt{5}}{2},\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{KB}=1,$$

следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{KB}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{KB}|}=\frac{4}{5},\ \varphi=\arccos\frac{4}{5}.$$

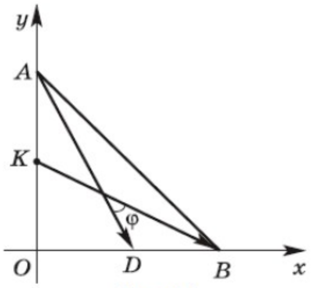


Рис. 8.4

8.14

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$, где точка M — середина ребра CC_1.

Решение. *Способ 1.*

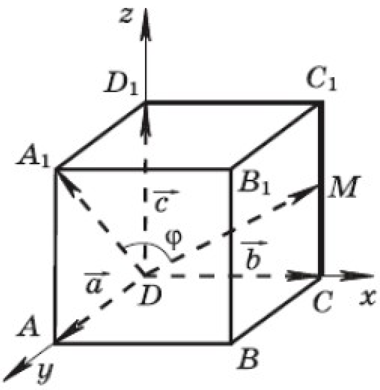
Введём систему координат, как показано на рисунке. Тогда

$D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 1;\ 1)$,

$M(1;\ 0;\ 0{,}5)$,

$\overrightarrow{DA_1}\{0;\ 1;\ 1\}$, $\overrightarrow{DM}\{1;\ 0;\ 0{,}5\}$,

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0+0\cdot 1+0{,}5\cdot 1}{\sqrt{1{,}25}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



Способ 2.

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1}=\vec{c}$.

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DM}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+0{,}5\vec{c})=0{,}5;$

$$|\overrightarrow{DM}|=\sqrt{1{,}25},\ |\overrightarrow{DA_1}|=\sqrt{2},\ \cos\varphi=\frac{\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{DM}|\cdot|\overrightarrow{DA_1}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Дайте необходимые пояснения.

Задача 3. Найти длину медианы AM треугольника ABC, где $A(0;0;3)$, $B(2;0;0)$, $C(4;-2;2)$.

Решение. Найдем координаты точки M – середины отрезка BC. По формуле нахождения координат середины отрезка $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ получаем, что $M\left(\frac{4+2}{2};\frac{0-2}{2};\frac{0+2}{2}\right)=M(3;-1;1)$.

По формуле нахождения длины вектора $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2+(z_2-z_1)^2}$ получаем, что $AM=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(3-0)^2+(-1-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

Задача 2. Определите вид треугольника ABC и найдите его периметр, если $A(1;0;0)$, $B(1;3;4)$, $C(4;3;0)$.

Решение. По формуле $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2+(z_2-z_1)^2}$, найдем длины AB, BC и AC:

$$AB=\sqrt{(1-1)^2+(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{0+9+16}=5;$$
$$BC=\sqrt{(4-1)^2+(3-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+0+16}=5$$

Значит, треугольник равнобедренный, т. к. $AB=BC$.

$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$.

Тогда периметр $P = 10 + 3\sqrt{2}$.

Ответ: треугольник равнобедренный; $P = 10 + 3\sqrt{2}$.

I. Домашнее задание на 01.06.2020

Учебник Глава 6 П. 46-52 повторить Решить задачи стр №№ 402, 409(е), 413(г.д), 448 (а, в), 464(а), 468

1. Найти координаты точки B, если известны координаты точки $C(1;\ 5;2)$, середины отрезка AB и точки $A(-1;\ 3;10)$.

2. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если даны точки $A(9;7;-7)$ и $B(11;16;-1)$.

3. Вычислить длину вектора $\vec{p}$, если $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{a}(5;9;6)$; $\vec{b}(1;1;1)$.

Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru