муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края

357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	27.04.2020
Тема урока	Параллельность прямых и плоскостей
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята!

II. Обобщение и систематизация материала

Откроите учебник на стр.9 повторите § 1 и 3

Прямая в пространстве – понятие.

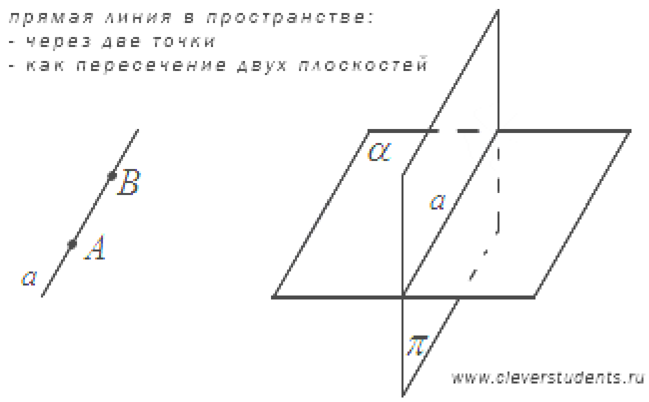
В разделе прямая на плоскости мы дали представление о точке и прямой на плоскости. Прямую линию в пространстве следует представлять абсолютно аналогично: мысленно отмечаем две точки в пространстве и проводим с помощью линейки линию от одной точки до другой и за пределы точек в бесконечность.

Все обозначения точек, прямых и отрезков в пространстве аналогичны случаю на плоскости.

Вообще, прямая линия целиком принадлежит некоторой плоскости в пространстве. Это утверждение вытекает из аксиом:

- через две точки проходит единственная прямая;
- если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Существует еще одна аксиома, которая позволяет рассматривать прямую в пространстве как пересечение двух плоскостей: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

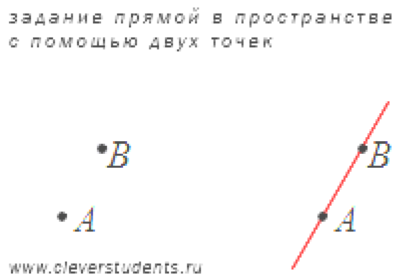


Способы задания прямой в пространстве.

Существует несколько способов, позволяющих однозначно определить прямую линию в пространстве. Перечислим основные из них.

Мы знаем из аксиомы, что через две точки проходит прямая, причем только одна. Таким образом, если мы отметим две точки в пространстве, то это позволит однозначно определить прямую линию, проходящую через них.

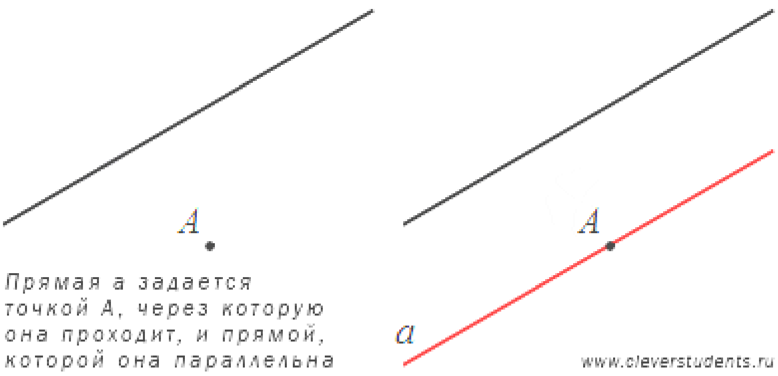
Если в трехмерном пространстве введена прямоугольная система координат и задана прямая с помощью указания координат двух ее точек, то мы имеем возможность составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.



Второй способ задания прямой в пространстве основан на теореме: через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и причем только одна.

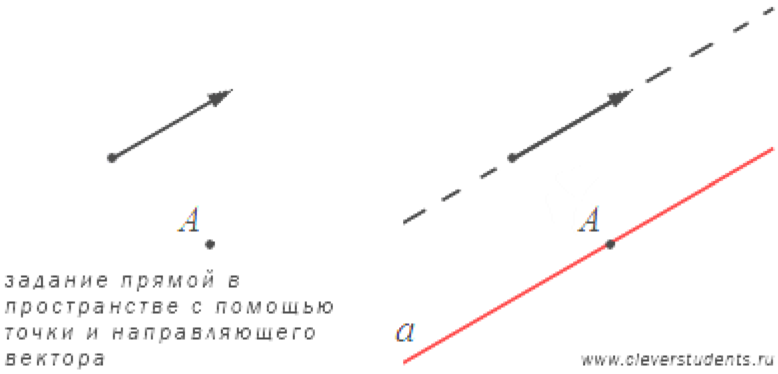
Таким образом, если задать прямую (или отрезок этой прямой) и не лежащую на ней точку, то мы однозначно определим прямую, параллельную заданной и проходящей через данную точку.

Рекомендуем также ознакомиться со статьей уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданной прямой.



Можно указать точку, через которую проходит прямая и ее направляющий вектор. Это также позволит однозначно определить прямую.

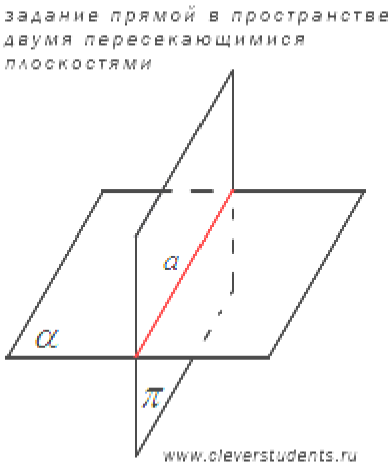
Если прямая задана таким способом относительно зафиксированной прямоугольной системы координат, то мы можем сразу записать ее канонические уравнения прямой в пространстве и параметрические уравнения прямой в пространстве.



Следующий способ задания прямой в пространстве основан на аксиоме стереометрии: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Таким образом, задав две пересекающиеся плоскости, мы однозначно определим прямую в пространстве.

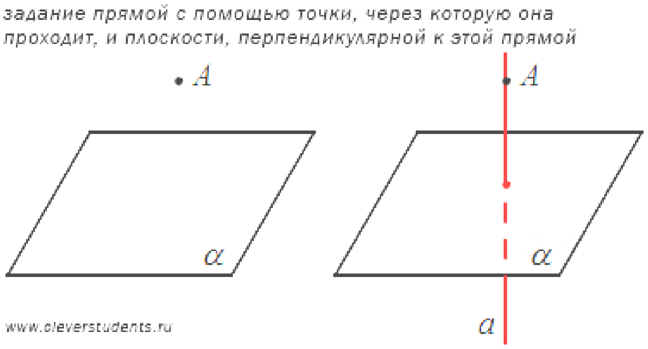
Смотрите также статью уравнения прямой в пространстве - уравнения двух пересекающихся плоскостей.



Еще один способ задания прямой в пространстве следует из теоремы (ее доказательство Вы можете найти в книгах, указанных в конце этой статьи): если задана плоскость и не лежащая в ней точка, то существует единственная прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к заданной плоскости.

Таким образом, чтобы определить прямую, можно задать плоскость, которой искомая прямая перпендикулярна, и точку, через которую эта прямая проходит.

Если прямая задана таким способом относительно введенной прямоугольной системы координат, то будет полезно владеть материалом статьи уравнения прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданной плоскости.



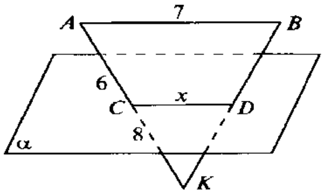
№1

Задача. Параллельность прямой и плоскости.

Дано: $AB \parallel \alpha$,
$AB = 7$,
$ABK \cap \alpha = CD$,
$AC = 6$, $CK = 8$.

1. Каково взаимное расположение прямых AB и CD?
2. Найдите CD.

Решение.
1. $AB \parallel CD$.
2. $\triangle AKB \sim \triangle CKD$.
$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}$, $x = 4$.



Приведите необходимые обоснования.

№2

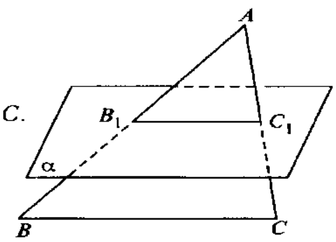
Задача. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1. Известно, что $BC \parallel \alpha$, $AB : B_1B = 8:3$, $AC = 16$ см.
1. Докажите, что $B_1C_1 \parallel BC$.
2. Найдите AC_1.

Решение.

Способ 1
1. $BC \parallel \alpha$, $ABC \cap \alpha = B_1C_1 \Rightarrow B_1C_1 \parallel BC$.
2. $AC_1 : C_1C = 5:3$,
$5m + 3m = 16$, $m = 2$,
$AC_1 = 5m$, $AC_1 = 10$.

Способ 2

$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, $\frac{5}{8} = \frac{AC_1}{16}$, $AC_1 = 10$.



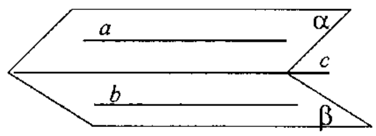
Дайте обоснование решения.

III. Домашнее задание

Учебник § 1,2,3,4 повторить

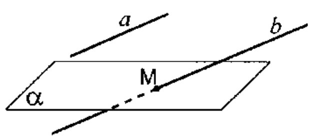
1) Решение задач на готовых чертежах (компьютерные слайды по материалам сборника Е.М.Рабиновича №3,4,5,7)

3



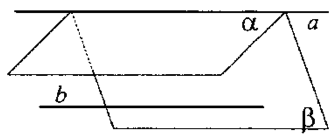
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. $a \parallel b$. Доказать: $a \parallel b \parallel c$.

5



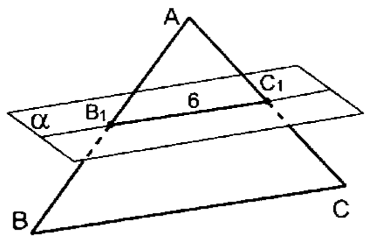
Дано: прямая b пересекает плоскость α в точке M. $a \parallel b$.
Доказать: a пересекает α.

4



Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$.
Доказать: $b \parallel a$.

7



Дано: плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно.
$B_1C_1 \parallel BC$, $AC_1 : C_1C = 3:4$.

Найти BC.

<u>Краткие указания к решению задач на готовых чертежах:</u>

№3. Доказательство: т.к. $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$, откуда $a \parallel c$.

№4. Указание. Выбрать на прямой a точку A и провести через точку A и прямую b плоскость γ. Доказать, что прямая a лежит в этой плоскости.

№5. Доказательство: предположим, что $a \parallel \alpha$. Через M и a проведём плоскость. Она пересекает плоскость α по прямой c, параллельной a. Тогда через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a. Приходим к противоречию.

№7. $BC = 14$. Указание: рассмотреть подобные треугольники ΔABC и ΔAB_1C_1.

Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 31 со спортивным уклоном города Пятигорска Ставропольского края

357538 Россия, Ставропольский край, г. Пятигорск, улица Мира,187
телефон (879 3) 98-11-25 факс (879 3) 98-11-25

Конспект урока

Предмет	Геометрия
Класс	11
Учитель	А.В.Гусева
Дата урока	29.04.2020
Параллельность прямых и плоскостей	Параллельность прямых и плоскостей
Основной вид учебной деятельности	Урок обобщения и систематизации знаний

Ход урока

I. Организационный этап.

- Доброе утро, ребята!

II. Обобщение и систематизация материала

Перпендикулярность прямой и плоскости

Перечень вопросов, рассматриваемых по теме

1. Ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве;
2. Доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых;
3. Решать задачи по теме.

Глоссарий по теме

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

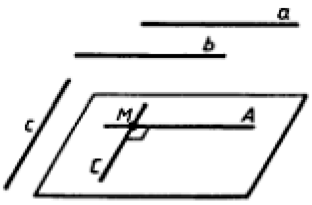
Открытые электронные ресурсы:

Перпендикулярность прямой и плоскости. http://school-collection.edu.ru // Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

Перпендикулярность прямой и плоскости. https://www.yaklass.ru // Я-класс. Образовательный портал Сколково.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой..



Доказательство:

Дано: $a \parallel b$, $a \perp$ c

Доказать: $b \perp c$

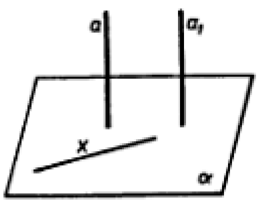
Через точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c. Так как $a \perp c$, то ∠AMC=90º.

Так как $b \parallel a$, а $a \parallel$ MA, то $b \parallel$ MA.

Итак, прямые b и с параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между ними равен 90º, т.е. b ∥ MA, с ∥ MC, угол между MA и MC равен 90º

Это означает, что угол между прямыми b и с также равен 90º, то есть b ⊥ c.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Доказательство:

Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$

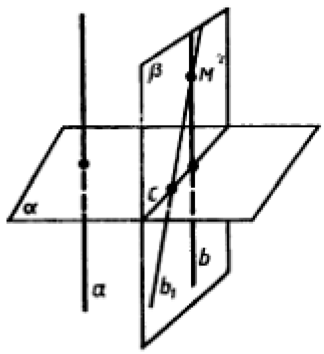
Доказать, что $a_1 \perp \alpha$

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α, т.е. $x \in \alpha$.Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$.

По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$.

Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$

Теорема. Ели две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.



Дано: $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$

Доказать, что $a \parallel b$

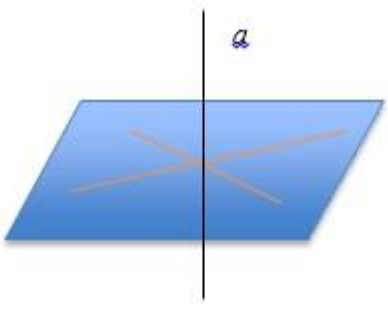
Доказательство:

Через какую-нибудь точку М прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a.

$M \in b$, $M \in b_1$, $b_1 \parallel a$. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$.

Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будем доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b_1 и b не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$, т.е. $b \in \beta$, $b_1 \in \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (невозможно)$\rightarrow a \parallel b$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Теорема. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

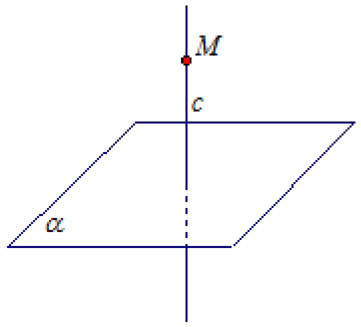


Рис. 2.

Доказательство.

Пусть дана плоскость α и точка *M* (см. рис. 2). Нужно доказать, что через точку *M* проходит единственная прямая *c*, перпендикулярная плоскости *α*.

Проведем прямую *a* в плоскости α (см. рис. 3). Согласно доказанному выше утверждению, через точку *M* можно провести плоскость γ перпендикулярную прямой *a*. Пусть прямая *b* – линия пересечения плоскостей α и γ.

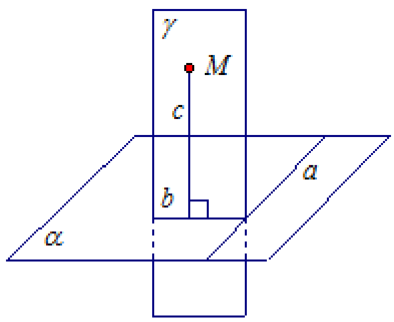


Рис. 3.

В плоскости γ через точку *M* проведем прямую *c*, перпендикулярную прямой *b*.

Прямая *c* перпендикулярна *b* по построению, прямая *c* перпендикулярна *a* (так как прямая *a* перпендикулярна плоскости γ, а значит, и прямой *c,* лежащей в плоскости γ). Получаем, что прямая *c* перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости α. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *c* перпендикулярна плоскости α. Докажем, что такая прямая *c* единственная.

Предположим, что существует прямая c_1, проходящая через точку *M* и перпендикулярная плоскости α. Получаем, что прямые *c* и c_1 перпендикулярны плоскости α. Значит, прямые *c* и c_1 параллельны. Но по построению прямые *c* и c_1пересекаются в точке *M*. Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку *M* и перпендикулярная плоскости α, что и требовалось доказать.

Теоретический материал для углубленного изучения

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

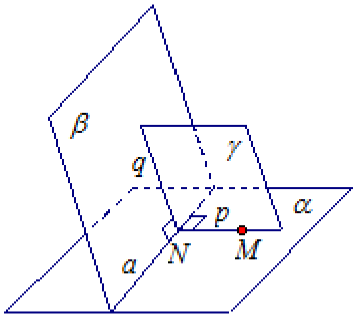


Рис. 1.

Доказательство (см. рис. 1)

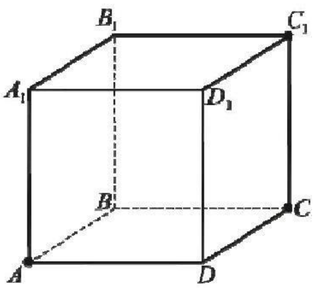
Пусть нам дана прямая *a* и точка *M*. Докажем, что существует плоскость γ, которая проходит через точку *M* и которая перпендикулярна прямой *a*.

Через прямую *a* проведем плоскости α и β так, что точка *M* принадлежит плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*. В плоскости α через точку *M* проведем перпендикуляр *MN* (или *p*) к прямой *a*, $N \in a$. В плоскости β из точки *N* восстановим перпендикуляр *q* к прямой *a*. Прямые *p* и *q* пересекаются, пусть через них проходит плоскость γ. Получаем, что прямая *a* перпендикулярна двум пересекающимся прямым *p* и *q* из плоскости γ. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *a* перпендикулярна плоскости γ.

Примеры и разборы решения заданий тренировочного модуля

Пример 1

Выбор элемента из выпадающего списка



Выпишите ребра, перпендикулярные плоскости (DCC_1).

- AD, A_1D_1, BC, B_1C_1
- AD, AC, AD_1,
- BC, BA.

Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):

- AD, A_1D_1, BC, B_1C_1

Неправильный вариант/варианты (или комбинации):

Все остальные

Подсказка: в кубе все углы по 90^0. Плоскость (DCC_1), проходит через грань куба DCC_1D_1.

- **Разбор задания:** Куб – это геометрическая фигура у которой все углы прямые, следовательно нужно увидеть ребра которые перпендикулярны к плоскости (DCC_1), к грани куба (DDCC_1).Эти ребра - *AD*, A_1D_1, *BC*, B_1C_1

Пример 2

Ребус – соответствия.

Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение.

Утверждение:

- Две прямые называются перпендикулярными, если …..
- Если плоскости перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она ……

Варианты ответов:

- угол между ними равен 90^0
- перпендикулярна и другой
- параллельны
- один
- она перпендикулярна к любой прямой, лежай в этой плоскости.
- перпендикулярна плоскости.

Правильный вариант/варианты (или правильные комбинации вариантов):

Две прямые называются перпендикулярными, если …	угол между ними равен 90°
Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она …	перпендикулярна и другой

Неправильный вариант/варианты (или комбинации):

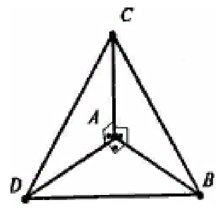
Все остальные.

Подсказка:

Лемма: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к третьей прямой.

Теорема: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

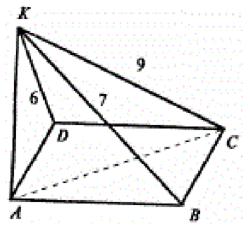
3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны.
Найдите отрезок CD, если:
1) AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см;
2) BD = 9 см, BC = 16 см, AD = 5 см;
3) AB = b, BC = a, AD = d;
4) BD = c, BC = a, AD = d.



Так как прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны, то они образуют 3 прямоугольных треугольника, со смежными сторонами. Тогда:

1. В ΔABC:
AB = 3см, BC = 7см, значит, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 49 - 9 = 40$ (см).
Далее в ΔACD:
$CD^2 = AC^2 + AD^2 = 40 + 2,25 = 42,25$ (см^2), тогда CD = 6,5 (см).
2. В ΔABD:
$AB^2 = DB^2 - AD^2 = 81 - 25 = 56$ (см^2).
Далее в ΔABC:
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 256 - 56 = 200$ (см^2); $AC^2 = 200$см^2.
Далее в ΔCAD:
$DC^2 = AC^2 + AD^2 = 200 + 25 = 225$ (см^2), то есть DC = 15см.
3. В ΔCAB : $AC^2 = BC^2 - AB^2$, то есть $AC^2 = a^2 - b^2$.
Далее в ΔCAD : $CD^2 = AC^2 + AD^2 = (a^2 - b^2) + d^2$, значит,
$CD = \sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$.
4. В ΔADB : $AB^2 = DB^2 - AD^2 = c^2 - d^2$.
Далее в ΔABC : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = a^2 - (c^2 - d^2)$.
И в ΔACD : $DC^2 = AC^2 + AD^2 = (a^2 - c^2 + d^2) + d^2$, тогда
$DC = \sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$.

7. Через вершину A прямоугольника ABCD проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.



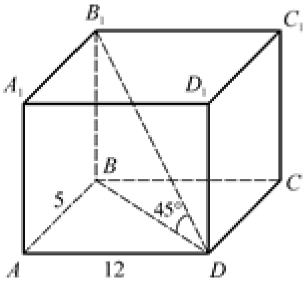
Пусть ABCD — прямоугольник, AK ⊥ ABCD. Значит KC = 9м; пусть KB = 7м, KD = 6м.

$\angle KBC = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), поэтому $BC^2 = =KC^2 - KB^2 = 9^2 - 7^2 = 32$ (м^2) (по теореме Пифагора).

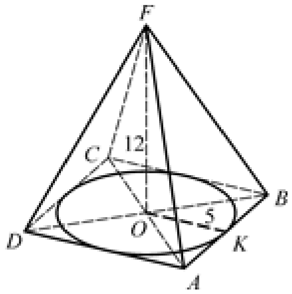
Далее $AD^2 = BC^2$ (так как ABCD — прямоугольник). Поскольку $KA \perp AD$, то
$AK = \sqrt{KD^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2$ (м).

Домашнее задание на 06.05: учебник § 1,2,3 повторить, разобрать задачи в этом конспекте

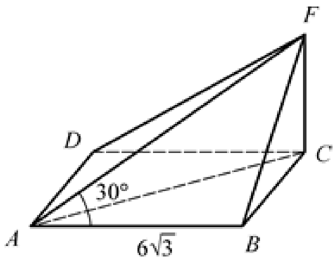
1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед.
$AB = 5$, $AD = 12$,
Р$BDB_1 = 45°$.
Найдите BB_1.



2.Дано: *ABCD* – ромб,
$r_{\text{вписанной окружности}}$ = 5, *FO* □ (*ABC*),
AC З *BD* = *O*, *FO* = 12.
Найдите расстояние от точки *F* до прямой *AB*.



3. Дано: *ABCD* – прямоугольник, *AB* = $6\sqrt{3}$, *FC* □ (*ABC*),
Р*FAB* = 30°. Найдите расстояние от точки *F* до прямой *AB*.



Фото/или скриншот домашнего задания высылайте на почту: guseva_klass2020@mail.ru