Олимпиадная работа
школьного этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике
обучающегося 10А класса
муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
средней общеобразовательной школы № 31 со спортивным уклоном
города Пятигорска Ставропольского края

шифр 10-04

Кузичкина Петра Николаевича
Ф.И.О. участника

Педагог-наставник:
учитель математики
муниципального бюджетного
общеобразовательного учреждения
средней общеобразовательной школы
№31 со спортивным уклоном города
Пятигорска Ставропольского края
Гайворонская М.А.

22 сентября 2020 года

**Задания**
**школьного этапа Всероссийской олимпиады**
**по математике в 2020 - 2021 учебном году**
**10 класс**

**Время выполнения заданий – 3 урока.**

1. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

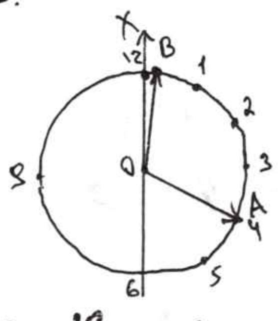
2. Сколько цифр содержит число $4^5 \cdot 5^{13}$?

3. Садовод в течение июля и августа наблюдал за своей яблоней. За каждый месяц каждое яблоко увеличивает вес в 1,5 раза, но при этом 20% хороших яблок становятся червивыми. Как и на сколько процентов изменился общий вес хороших яблок в конце августа по сравнению с началом июля, если в начале июля ни одного червивого яблока не было?

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, BD – высота, опущенная на гипотенузу AC. Найти сумму радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ADB и CDB, если BD равно 12 см.

5. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличиться на 2011. Как измениться произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

N1. 7б




рассмотрим часы круглой формы. Обозначим пересечение прямой, содержащей часовую стрелку, с окружностью часов за B, а секундной за A. O – центр окружности, из которого проходят стрелки часов. Проведем ось OX, проходящую через центр O и ~~цифр~~ число 12 на часах.
Искомый угол $\angle AOB = \angle AOX - \angle BOX$.

$\angle AOX = \frac{20}{60} \cdot 360° = 120°$ (т.к. минутная стрелка показывает на цифру 4, а всего – 12, расположенных на равных расстояниях.) Вся окружность имеет 360°.
$\angle BOX = \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360° = 10°$ (т.к. часовая стрелка ~~показывает~~ прошла ту часть от часа, какую прошла минутная стрелка от 60 минут)
$\angle AOB = \angle AOX - \angle BOX = 120° - 10° = 110°$

Ответ: 110°.

N2.
$4^5 \cdot 5^{13} = (2^2)^5 \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot (2 \cdot 5)^{10} = 5^3 \cdot 10^{10} = 125\underbrace{00\ldots0}_{10}$.
Это число есть „125" с 10-ю нулями в конце, т.е. всего 10
$3 + 10 = 13$.

Ответ: 13. 7б

№3.

Пусть $x$ – вес хороших яблок в начале июля, $y$ – количество яблок, $a$ – вес 1-го яблока. Тогда $x = ya \iff 1{,}5a\cdot y\cdot 0{,}8 = 0{,}8\cdot 1{,}5x$.

Таким образом, при изменении веса каждого яблока в $n$-е количество раз и изменение количества хороших яблок в $k$-е кол-во раз, вес хороших яблок изменяется в $k\cdot n$ раз.

В конце 1-го месяца вес яблок равен $1{,}5\cdot 0{,}8x = 1{,}2x$;
в конце 2-го равен $1{,}2x\cdot 0{,}8\cdot 1{,}5 = (1{,}2)^2\cdot x = 1{,}44x$.

$\frac{1{,}44x}{x} = 1{,}44$. ; $1{,}44\cdot 100\% = 144\%$ $\quad 144\% - 100\% = 44\%$

Таким образом, вес хороших яблок в конце августа увеличится на 44%.

Ответ: увеличится на 44% 7б

№5.

$(a+1)(b-1) - ab = 2011$
$ab + b - a - 1 - ab = 2011$
$b - a = 2012$
$b = 2012 + a$.

$\boxed{\text{пусть } a_1 = (a+1)(b-1);\ a_2 = (a-1)(b+1)}$

$(a+1)(b-1) = (a+1)(2011+a) = a^2 + 2011a + a + 2011 = a^2 + 2012a + 2011$ ①
$(a-1)(b+1) = (a-1)(2013+a) = a^2 + 2013a - 2013 - a = a^2 + 2012a - 2013$. ②

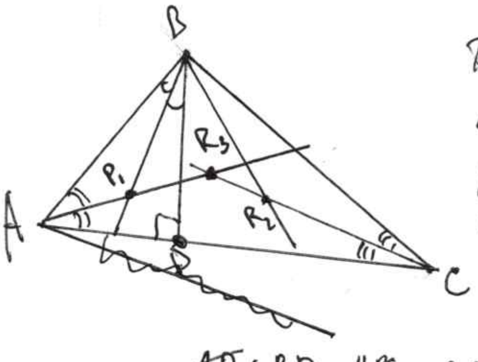
Вычитая из второго равенства первое, получаем:

$a_2 - a_1 = -2013 - 2011 = -4024$. т.е. $a_2$ меньше $a_1$ на 4024, а $a_1$ в свою очередь больше $ab$ на 2011. $\Rightarrow a_2 - ab = 2011 - 4024 = -2013$

Значит, если уменьшить первый множ. на 1, а второй множитель увеличить на 1, то произведение уменьшится на 2013.

Ответ: уменьшится на 2013. 7б

№4.




Пусть $R_1$ – центр окруж. $\triangle ABD$, $R_2$ – центр окр. в. $\triangle BDC$, $R_3$ – центр окр. в $\triangle ABC$.
Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен половине суммы катетов без гипотенузы, т.е.
$r_1 = \frac{AD+BD-AB}{2}$; $r_2 = \frac{BD+DC-BC}{2}$; $r_3 = \frac{AB+BC-AC}{2}$

$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{\cancel{AD} + BD - \cancel{AB} + BD + \cancel{DC} - \cancel{BC} + \cancel{AB} + \cancel{BC} - \cancel{AC}}{2} = \frac{2BD}{2} = BD = 12$

Ответ: 12. 7б